7　万有引力と惑星

7.1　万有引力

ケプラーの法則　古代から人々は，天体は不動の大地のまわりを回転しているものと信じていた（**天動説**）．しかし，16 世紀になると，**コペルニクス**が，天体は恒星と惑星に区別され，惑星は恒星（太陽）のまわりを運動していると考えるに至った（**地動説**）．このころ，**ティコ・ブラーエ**は長年にわたって惑星を事細かに観測して，膨大な資料を残した．ティコ・ブラーエの死後，彼の助手を務めていた**ケプラー**は，しぶるティコ・ブラーエ夫人を説得し，なんとかそれらの資料を手に入れた．

☞ コペルニクスは惑星の軌道は円だと考えていた．

ケプラーは長い年月をかけてその資料を分析した．その結果，1609 年に惑星の運動に関する次のような 2 つの法則を発見した（図 7.1）（**ケプラーの法則**）．

ケプラーの第 1 法則:　惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く．

ケプラーの第 2 法則:　惑星の単位時間に掃く面積は一定である（面積速度一定の法則）．

図 7.1　天体の楕円運動

さらにケプラーは 10 年もかけて，第 3 の法則を発見した．

ケプラーの第 3 法則:　惑星の公転周期 T の 2 乗は，惑星の半長軸の長さ a

の 3 乗に比例する．すなわち

$$T^2 \propto a^3 \tag{7.1}$$

ケプラーの法則は，のちにニュートンが万有引力を発見するための基礎になった，重要な発見である．天体観測の膨大な資料から，これらの 3 つの法則を発見するまで，10 年以上も要したということは特筆に値する．現在ならば，地動説さえ容認すれば，コンピュータを用いて数分でケプラーの法則を導けるであろう．科学技術の進歩は，科学そのものの進歩にも重大な影響をもたらす例である．

ニュートンの登場　アイザック・ニュートンはケンブリッジ大学の学生であった．ロンドンはもとより，ケンブリッジまでペストが流行し，大学は閉鎖され，彼はやむなく故郷のウールスソープに疎開した．

ウールスソープの農地は広大であったので，何もすることのない内省的な**ニュートン**は，農地のあぜ道を散歩して日々を過ごした．今もそうであるが，ヨーロッパの農地のあぜ道にはポプラの木の他に，リンゴの木が植えられていた．日本の農地のあぜ道によく柿の木が植えられているのと似ている．

伝説によると，晩秋の頃，寒々としたあぜ道を散歩するニュートンは，枝もたわわなリンゴの木から，1 個のリンゴが音もなく落ちるのを不思議そうに見つめていた．この世に存在する基本的な 4 つの力のうち，最初に見つかった力，**万有引力**の発見の瞬間である．そのとき，空を仰ぐと，ちょうど月が天空に見えた．あの月はなぜ落ちてこないのか．リンゴが木から落ちるのもあの月にかかっている力も，同じものではないのか．それとも，リンゴという地表にあるものと，月という天空にあるものとでは，別世界のものなのか．天は神の支配する世界であるから，リンゴと同列に考えてはいけないのか．

そうとは限らないとニュートンは考えた．天空といえども，地上のリンゴが受ける作用と同じものが働いている，つまり地上を支配する物理法則と同じ法則が天空をも支配していると考えられないか．そうだとするなら，なぜ月は落ちこないのか――そうだ，月も落ちている．しかし動いている（円運動）ため，落ちても地球に到達しないのだ（図 7.2）．つまり月もリンゴと同じ自由落下をしている．ただ，鉛直方向以外にも成分があるため，円運動を描いているのだ．

万有引力　質量 M の太陽のまわりを円軌道を描いて運動している質量 m の惑星の間に引力 F が働くとしよう（図 7.3）．公転周期を T とすると，半径 r との間に，ケプラーの第 3 法則，

$$T^2 = kr^3 \ (k : \text{比例定数}) \tag{7.2}$$

図 7.2　月の落下と円運動

が成り立つ．これから重力が距離 r にどのように依存するかを考察しよう．

円運動の角速度を ω とする．微小時間 Δt の間に角度は $\omega\Delta t$ だけ変化するので，惑星は $r \times \omega\Delta t$ だけ移動する．一方，速さで書くと移動距離は $v\Delta t$ である．よって，

$$v = r\omega \tag{7.3}$$

☞ 角度 × 半径=弧の長さが成立するように，角速度はラジアンで表わすのが一般的である．

となる．そこで第 3 章で求めた円運動の加速度の表式，(3.22) において，$v = r\,\omega$ を代入し，

$$\text{円運動の加速度} = r\omega^2 \tag{7.4}$$

導かれる．

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{7.5}$$

円運動しているときの加速度は $r\omega^2$ なので，運動方程式は

$$mr\omega^2 = F \tag{7.6}$$

すなわち，

$$mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = F \tag{7.7}$$

である．式 (7.2) により T を消去すると，

$$F = mr\frac{4\pi^2}{kr^3} = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2} \tag{7.8}$$

となる．つまり，惑星が円運動を行うためには，惑星の質量 m に比例し，距離 r の 2 乗に反比例した引力が働いていなければならないことになる．

一方，作用・反作用の法則によって，同じ大きさの引力が太陽にもかからなければならない．太陽を特別扱いしないかぎり，F は太陽の質量 M にも比例することになる．よって比例係数を改めて G とおくと，**万有引力**は

$$\boxed{F = G\frac{mM}{r^2}} \tag{7.9}$$

図 7.3　太陽のまわりの惑星の円運動

となる．ここで「万有」とは，universal (ユニバーサル) の翻訳で,「全宇宙で普遍的な」という意味である．地球上のリンゴにも，月や火星のような天体にも，普遍な力が働いているのである．この発見がニュートンの偉大な業績である．なお，G を**万有引力定数**という．

$$G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2 \tag{7.10}$$

万有引力は 2 つの物体を結ぶ直線上に働く．これをベクトルで表すと

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}} \tag{7.11}$$

となる．

地表の重力　地球の表面にある質量 m のリンゴには，地球の中心に向かって

$$F = mg \quad (g = 9.8m/s^2 \text{は重力定数}) \tag{7.12}$$

の引力が働く．この引力は，リンゴと地球内部の様々な部分からの万有引力をたし合わせたものである．これらの万有引力の総和は，**地球の中心（重心）に地球の全質量がすべて集まった質点からの万有引力に等しい．**

☞ 一般に球対称に質量が分布している場合，全質量が球の中心に集中していると考えてよいことが万有引力について成り立つ．

すなわち，地球の半径を R とすると，M を地球の質量として，

$$G\frac{mM}{R^2} = mg \tag{7.13}$$

$$\therefore g = \frac{GM}{R^2} \tag{7.14}$$

18 世紀後半に，イギリスの物理学者キャベンディッシュは，重い 2 個の球の間に働く万有引力を精密な実験装置で測定することに成功した．この実験により，彼は地球の密度が水の 5.5 倍だということを示した．地球の密

図 7.4　地球の各部分からの万有引力の総和が重力 mg となる．

度がわかれば地球の質量がわかり，上の式から，万有引力定数 G もわかる．

例題 7.1　地球の質量

式（7.13）と，万有引力定数，重力定数を用いて地球の質量を求めよ．

解　式（7.13）より，

$$M \fallingdotseq \frac{gR^2}{G} = \frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}}\,kg = 6.0 \times 10^{24}\,kg \tag{7.15}$$

万有引力の位置エネルギー　すでに述べたように，万有引力が保存力ならば，その位置エネルギー V が存在し，万有引力 $\boldsymbol{F}$ と V の間には，

$$\boldsymbol{F} = -gradV \tag{7.17}$$

の関係が成り立っている．事実，

$$V = -G\frac{mM}{r} \tag{7.18}$$

とおけば，式 (7.17) を満たしていることが確かめられる．実際に確かめてみよう．$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であるので，

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{r^2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} \end{aligned} \tag{7.19}$$

同様に，

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = -\frac{1}{r^2}\frac{z}{r} \tag{7.20}$$

である．したがって，式 (7.11) が得られる．

☞ 演習問題 6.4 参照

コラム　銀河の回転速度

銀河系は中心の周りに回転している．銀河系の質量分布は一様，すなわち密度 ρ が一定だと仮定して，中心から r だけ離れた位置における恒星が，銀河中心の周りを回っている角速度 ω を求めてみよう．

半径 r の内側に入っている質量 $M(r)$ は

$$M(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$$

である．質量分布は球対称なので中心に質点 $M(r)$ があるとして，重力を計算してよい．よって恒星がうける重力加速度は

$$G\frac{M(r)}{r^2} = G\frac{4\pi r\rho}{3}$$

となる．これが式 (7.4) で与えられる向心加速度 $r\omega^2$ を生んでいるので，

$$G\frac{4\pi r\rho}{3} = r\omega^2$$

よって，

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} \tag{7.16}$$

となり，角速度は半径に依存しない．これより銀河の形は崩れないことがわかる．

実際に銀河の恒星分布を観測すると，より中心付近に多くの恒星が存在する．銀河の質量のほとんどを恒星が担っているとすれば（実際，太陽の質量は地球の 33 万倍である.），恒星の密度が大きい内側ほど角速度が大きく，外側ほど小さいことになる．一方，観測事実は，角速度が位置によらずほぼ一定であることを示している．そのため，光を発しない物質，ダークマターが宇宙には満ちあふれていると考えられている．現在もこのダークマターの正体を突き止めようと研究が進んでいる．

ここで行ったのは V を仮定して，それが確かに力を再現することを確かめるというやり方である．今度は逆に，質量 M の太陽から無限遠に位置していた質量 m の惑星が，距離 r まで移動するとき，太陽が惑星に対して行う仕事として，V を定義しよう．保存力の場合，仕事は経路にはよらないので，一番簡単に移動は太陽と惑星を結ぶ直線上とする．このとき，力と移動の方向は等しいので，式 (6.4) において $\cos\theta = 1$ とすればよく，

$$V = -\int_\infty^r F dr = GmM\int_\infty^r \frac{1}{r^2}dr = GmM\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r = -GmM\frac{1}{r} \tag{7.21}$$

となる．これは上で与えた V と一致する．

☞ 式 (7.18) は微分して力を再現するように選んでいるだけなので，実は定数を加えてもよい．一方，式 (7.21) は，無限遠を原点として位置エネルギーを計算しているので，定数の曖昧さがない．

7.2　角運動量

角運動量　作用・反作用の法則にしたがって相互作用する物体の運動量の総和は常に不変であった．これが運動量の保存則である．万有引力で相互作用する場合も，作用・反作用の法則にしたがうので，運動量の総和も

一定である．さらに万有引力は

$$\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}\,,\ f(r) = -\frac{GmM}{r^3} \tag{7.22}$$

という，常に $\boldsymbol{r}$ と平行で，大きさは方向にはよらず，r にのみよっている．このような場合，力は球対称の形になるので，**中心力**とよばれる．

力が中心力である場合，特別な保存法則が成立する．それを**角運動量保存則**という．これは

$$L = rp_{\perp} \tag{7.23}$$

で定義される．ここで $p_{\perp}$ は図 7.5 に示すように，運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ の動径方向 $\boldsymbol{r}$ に垂直な成分（つまり回転方向にそった成分）である．

運動量 mv が運動の「いきおい」を示すように，角運動量も回転の「いきおい」を表す．角運動量の定義から，同じ運動量をもっていても，中心からの距離が遠いほど，その「いきおい」は大きい．一般に，動径距離を掛けた量は「モーメント」とよばれる．その意味で，角運動量は「回転の運動量モーメント」である．

運動量がベクトル $m\boldsymbol{v}$ で表されたように，角運動量は

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{7.24}$$

と定義される．ここに $\times$ は**ベクトル積**とよばれるものである．これについては以下で説明する．

図 7.5　角運動量の定義

ベクトル積　　ベクトルどうしの積の作り方には 2 通りある．その 1 つはすでに述べたスカラー積（内積）で，

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{7.25}$$

で定義されるものである．一方，ここで新しく定義するのは**ベクトル積**（**外積**）というもので，以下のように計算結果はベクトルとなる（図 7.6）．

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\text{ベクトル}\begin{cases}\text{大きさ：}AB\sin\theta\\ \text{方向：}\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\text{の作る面と垂直}\\ \text{向き：}\boldsymbol{A}\text{から}\boldsymbol{B}\text{に右ねじを回して進む向き}\end{cases}\tag{7.26}$$

この定義から外積の大きさは，ベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B}$ の作る平行四辺形の面積だとわかる．$\boldsymbol{A}//\boldsymbol{B}$ の場合，2 つのなす角度は 0 なので，

☞ 外積の記号 × の読み方は”クロス”である．一方，内積は”ドット”と読む．

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}\tag{7.27}$$

である．よって，同じものどうしの外積も $\boldsymbol{0}$ である．

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\tag{7.28}$$

図 7.6　ベクトル積（外積）の定義．$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ の方向に右ねじを回して進む向き．もしくは，右手の人差し指を $\boldsymbol{A}$，中指を $\boldsymbol{B}$ としたとき，それらと垂直にした親指の向き．

また，外積の場合，かけ算の順序も大切である．

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}\tag{7.29}$$

x 軸，y 軸，z 軸上の単位ベクトル（大きさ 1 のベクトル）をそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ とすると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y &= \boldsymbol{e}_z(=-\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_x)\\ \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z &= \boldsymbol{e}_x(=-\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y)\\ \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x &= \boldsymbol{e}_y(=-\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z)\end{aligned}\tag{7.30}$$

となる．任意のベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ を単位ベクトルで表すと，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{B} &= B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{7.31}$$

となるので，単位ベクトルの外積の関係（7.30）から

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y,A_zB_x-A_xB_z,A_xB_y-A_yB_x)\tag{7.32}$$

となることが確かめられる．

ベクトル積を用いて，角運動量ベクトルを定義したが，力のモーメント $\boldsymbol{N}$ もベクトル積を用いて表現できる．すなわち，

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{7.33}$$

てこがつり合うのはこの力のモーメントの合計が $\boldsymbol{0}$ になるときである．

角運動量の保存則　一般の惑星運動で，角運動量は，ケプラーの第 2 法則に表れる「単位時間に掃く面積」に相当する（図 7.7）．この面積は，角度が小さいとき，ほぼ三角形の面積に等しいので，

$$\text{単位時間に掃く面積 } S = \frac{1}{2} r v_{\perp} \tag{7.34}$$

となる．ここに $v_{\perp}$ は惑星の速度 $\boldsymbol{v}$ の動径方向に垂直な成分である．

一方，角運動量は

$$L = r p_{\perp} = m r v_{\perp} \tag{7.35}$$

となるので，

$$S \propto L \tag{7.36}$$

がわかる．すなわち，ケプラーの第 2 法則（面積速度一定の法則）は，角運動量が一定であることを示している．

図 7.7　惑星運動の掃く面積

ニュートンの運動方程式を用いて，角運動量の保存則を示すのは簡単である．

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{7.37}$$

において，両辺，$\boldsymbol{r}$ とのベクトル積をつくる．

$$m \boldsymbol{r} \times \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{7.38}$$

左辺の $\boldsymbol{F}$ は中心力，すなわち $\boldsymbol{F}//\boldsymbol{r}$ である．よって右辺の $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{0}$ であり，

$$m\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{0} \tag{7.39}$$

となる．一方，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ を時間で微分すると

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{7.40}$$

である．ここで $d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}//\boldsymbol{p}$ を用いた．よって式 (7.39) の左辺は $d\boldsymbol{L}/dt$ となり，

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{0} \tag{7.41}$$

もしくは，

$$\boldsymbol{L}=\text{一定} \tag{7.42}$$

となる．これは角運動量の保存則に他ならない．

☞ ケプラーの第 1 法則，第 3 法則は万有引力のような距離の 2 乗に反比例する力のもとでしか成立しない．一方，第 2 法則（角運動量の保存則）はより一般的な中心力に対して成立する．

角運動量の世界　いまからおよそ 46 億年前，太陽系には太陽も惑星も存在しなかった．そこにあったのはちりやほこりのみであった．この名残はいまでも宇宙から降ってくる．いわゆる「宇宙塵」というものである．大気中に漂う微粒子はエアロゾルとよばれるが，これらはほとんどが地表で巻き上げられた細かいほこり，産業活動に伴うほこりや煙であるが，中には地球上で生成されたものとはことなる微粒子も含まれている．これが宇宙塵である．

宇宙塵は全体として，ゆっくり回転していた．つまり角運動量 $\boldsymbol{L}$ をもっていた．ちりの分布は所々に濃淡があったと考えられている（図 7.8）．こうしたちりの間にはごく僅かながら，万有引力が働く．そこで宇宙塵の濃い部分が他のちりを引きつけて，ますます濃くなっていく．特に回転の中心部分は，宇宙塵の濃度が極めて高くなり，太陽が誕生する．太陽のもととなった宇宙塵は角運動量をもっていたので，太陽自身も角運動量をもつことになる．これが太陽の自転となって表れる．

その他の宇宙塵の濃い部分は，やはり万有引力で他の宇宙塵を引きつけ，惑星の誕生となる．このとき，宇宙塵の角運動量を引き継ぎ，惑星は自転，公転を行う．このように太陽と惑星の角運動量の大きさと方向・向きは，合計すると太陽・惑星誕生以前の宇宙塵の角運動量 $\boldsymbol{L}$ と等しい．

こうした誕生のいきさつを考えると，惑星の公転面がほぼ等しく，回転方向も一致していることが理解できる．それにしても物理の法則が 50 億年以上も成立し続けているというのは驚くしかない．

しかしもっと驚くべきことがある．広大な宇宙の運動が運動量，角運動量の保存則にしたがっているだけでなく，ミクロな世界，すなわち原子や原子核の世界でもこれらの法則が成り立っているのである．原子は中心に**原子核**が存在し，そのまわりを**電子**が回転している．原子核の正の電気と電

図 7.8　原始の太陽系

子の負の電気が互いに中心力で引き合い，角運動量の保存則が成立している．すべての原子の角運動量が 1 方向にそろっているとき，物質全体は磁性をもつ（図 7.9）．なぜなら，電子による微小な円電流がコイルとみなせ，それらの集合はコイルをたくさん重ねた状態となるからである．これが永久磁石のモデルである．

図 7.9　一定方向にそろった原子の角運動量と磁石．

スピン　フィギュアスケートの選手が，氷上で体をくるくる回すことをスピンという．選手は最初，腕を伸ばし回転を始めるが，腕を胸のところに組んで縮めると，スピンの回転速度は急に速くなる（図 7.10）．図のように腕の回転軸からの距離を r_A , r_B とおこう．図の A の場合は，腕の質量 m が回転軸から遠くにあるので $r_A > r_B$ である．

さて，このときの速度，角速度を $v_A, \omega_A, v_B, \omega_B$ とする．

$$v_A = r_A\omega_A \, , \, v_B = r_B\omega_B \tag{7.43}$$

である．角運動量はそれぞれ，mr_Av_A , mr_Bv_B である．角運動量保存則か

図 7.10　フィギュアスケートのスピン

ら，これらは等しい．上の関係を使うと，

$$\begin{aligned} mr_Av_A &= mr_Bv_B \\ mr_A^2\omega_A &= mr_B^2\omega_B \\ r_A^2\omega_A &= r_B^2\omega_B \\ \therefore \frac{\omega_B}{\omega_A} &= \frac{r_A^2}{r_B^2} \end{aligned} \tag{7.44}$$

つまり，手を縮めると，回転速度（角速度）は大きくなることがわかる．

地球，その他の惑星，太陽は自転しており，何十億年もの間，スピンをしつづけている．一方，ミクロの世界でもスピンが存在する．すなわち，電子や原子核，原子核をつくっているクォークも自転しているのである．特に電子は大きさがないと思われているのに，スピンをもっているというのが興味深い．これはいままで述べたことと矛盾している．角運動量は回転軸からの距離と速さの積なので，大きさがないものは速さ無限大で回転していない限り，スピンはもてないからだ．ミクロの世界は古典力学と違う法則が支配しているという典型的な例である．

☞ 電子が大きさをもたないことは，実験的にもかなりの精度で確認されている．

7.3　惑星の運動

エネルギーの保存則　惑星の運動についても，エネルギーの保存則が成り立つ．惑星の運動エネルギーを K，位置エネルギーを V とすると，$K+V=$ 一定，すなわち，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{mM}{r}\right) = E = \text{一定} \tag{7.45}$$

という関係が成り立つ．これを書き直すと，

$$\frac{1}{2}mv^2 = E + \left(G\frac{mM}{r}\right) \geq 0 \tag{7.46}$$

となる．最後の不等号は運動エネルギーが常に正であることからきている．つまり惑星の運動範囲は

$$E + \left(G\frac{mM}{r} \right) (\geq 0) \tag{7.47}$$

を満たす領域でのみ可能である．そこで r を横軸に，$V(r)$ を縦軸にプロットしてみよう（図 7.11）．この場合，$E > 0$ と $E < 0$ では様子が異なる．われわれの惑星についていえば，すべての惑星について $E < 0$ である．それは以下のようにしてわかる．

上の不等式は $E - V > 0$ のことであるから，y 軸の値が E をとる，x 軸に平行な直線を描くと，この直線が $V(r)$ よりも上のところにある領域が，運動の可能な領域である (**可動域**)．$E > 0$ の場合，これはあらゆる r の領域が可動域である．一方，図 7.11 をみてかわるように，$E < 0$ では，$r \leqq r_m$ の範囲でのみ，惑星の運動が可能である．これは我々の惑星が無限遠に飛んでいかないことを意味している．

☞ 太陽に近づくと，角運動量の保存則から，v が大きくなり，遠心力が働く．これにより惑星は太陽に衝突しない．

太陽に一度近づいて，その後，無限に飛び出してしまう星もある．これらは $E \geqq 0$ となっている．

図 7.11　$E - V \geqq 0$ の範囲．

軌道方程式　万有引力のもとで，運動をする星々の軌道を表すのが，**軌道方程式**である．軌道方程式は，通常の x, y 座標でなく，角度 θ と中心からの距離 r で表すと便利である．これを**極座標**とよぶ（図 7.12）．このとき，惑星の軌道方程式は

$$r = \frac{\ell}{1 + \epsilon \cos\theta} \quad (\epsilon \geq 0) \tag{7.48}$$

と表せる．これは $\epsilon < 1$ の場合，楕円である．角運動量 L とエネルギー E を用いると，ℓ, ϵ は

☞ このとき，原点（太陽の位置）は楕円の焦点である．楕円の中心でないことに注意．

$$\ell = \frac{L^2}{GMm^2} \tag{7.49}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}} \tag{7.50}$$

と定義される．ϵ は**離心率**とよばれるが，その意味はすぐ後で述べる．

図 7.12 極座標.

ところで $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であるから，軌道の様子は ϵ が 1 を境に大きく変わることがわかる．$\epsilon < 1$ の場合，太陽からの距離 r は

$$r = r_{max} \qquad = \frac{\ell}{1-\epsilon} \tag{7.51}$$

$$r = r_{min} \qquad = \frac{\ell}{1+\epsilon} \tag{7.52}$$

よって惑星は太陽から有限の距離にとどまる．r_{min}, r_{max} はそれぞれ近日点，遠日点にあたる．一方，$\epsilon = 1, \epsilon > 1$ はそれぞれ放物線軌道，楕円軌道となる（図 7.13 参照）．

ϵ の意味をもう少し考察しよう．$\epsilon = 0$ に対応するのは円軌道である．式 (7.51) から

$$\frac{r_{max}}{r_{min}} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \tag{7.53}$$

となり，ϵ は楕円の円からの「ゆがみ」，つまり「いびつさの程度」を表すことがわかる．離心率の “心” とは円のことで，ϵ は円からどれだけ離れているかを表している．

第 1，第 2 宇宙速度　できる限り地表に近く，円軌道で地球を周回する人工衛星を打ち上げるのには，どのくらいの速度が必要であろうか．答えは水平方向に v_1 =7.9 km/s である（図 7.14）．この速さを**第 1 宇宙速度**という．この速さをさらに増やして，ついに初速が v_2 =11.2 km/s に達すると，ロケットは地球の引力圏を離れて宇宙の彼方に飛んでいく．このとき軌道は放物線となる．この速さを**第 2 宇宙速度**という．

第 1 宇宙速度を導出しよう．人工衛星は地表近くにあるので，円運動の

図 7.13　楕円軌道，放物軌道，双曲線軌道

半径は $R = 6400$ km である．遠心力と重力がつり合うとすると

$$\begin{aligned} m\frac{v_1^2}{R} &= mg \\ \therefore v_1 &= \sqrt{Rg} \end{aligned} \tag{7.54}$$

一方，第 2 宇宙速度は以下のようにして求められる．地表での力学的エネルギー E は

$$E = \frac{m}{2}v_2^2 + \left(-G\frac{mM}{R}\right) \tag{7.55}$$

一方，無限遠にぎりぎり到達するとすると，その場合，速さは 0 になり，運動エネルギーは 0，無限なのでポテンシャルエネルギーも 0 なので，$E = 0$ である．力学的エネルギーの保存則を用いると，

$$0 = \frac{m}{2}v_2^2 + \left(-G\frac{mM}{R}\right) \tag{7.56}$$

となり，

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{7.57}$$

となる．式 (7.13) から

$$v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1 \tag{7.58}$$

g=9.8 m/s^2，$R = 6.4 \times 10^6$ m を代入して，$v_1 = 7.9 \times 10^3$ m/s，$v_2 = 1.1 \times 10^4$ m/s を得る．

☞ これはあくまで地球の引力圏を脱出する速度である．太陽系を脱出するにはさらに大きな速度が必要となる．

気象衛星，放送，通信用の衛星は地表に対して止まっていなければ不便である．これらは**静止衛星**とよばれる（図 7.15）．

静止衛星の地表からの距離を見積もってみよう．静止衛星の高度を h，地球の半径を R，自転周期 (24 時間) を T とすると，衛星の速度 v_s は

$$v_s = \frac{2\pi(R+h)}{T} \tag{7.59}$$

☞ 一方，スパイ衛星は地表近くを何度も周回するように打ち上げる．地表近くだと地球のまわりを第 1 宇宙速度で回ることで何周もできて，一日に何周もでき，また地球の自転により，少しずつ違う場所の画像もとれる．その上，近くなので写真もより鮮明である．

図 7.14　第 1 宇宙速度と第 2 宇宙速度

図 7.15　静止衛星とスパイ衛星の違い

遠心力と重力とのつり合いにより，

$$\begin{aligned} \frac{v_s^2}{R+h} &= G\frac{M}{(R+h)^2} \\ \therefore (R+h)v_s^2 &= MG = gR^2 \\ \therefore R+h = \frac{gR^2}{v_s^2} & \end{aligned} \tag{7.60}$$

これから $R+h$ は約 42,000 km，h は約 36,000 km となる．これはかなりの距離である．衛星電波を送って，相手届くのに 70,000 km 以上かかる．往復で 140,000 km である．電波は光の一種で 1 秒間に 300,000 km 進む．

よって，相手と話すと 0.5 秒の返答の遅れが生じることになる．

例題 7.2　人工衛星からのロケット

地球の半径を R とし，地球の中心から $6R$ の高度にある円軌道の人工衛星を打ち上げたい（これは本文で述べたほぼ静止衛星の高度である）．この回転速度は第 1 宇宙速度の何倍か．この人工衛星からロケットを宇宙の彼方に飛ばすには，どれだけの速さが必要か．

解　万有引力と遠心力のつり合いから，

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{6R} &= G\frac{M}{(6R)^2} \\ \therefore v &= \sqrt{\frac{GM}{6R}} = \sqrt{\frac{gR}{6}} \end{aligned} \tag{7.61}$$

よって，$1/\sqrt{6}$ 倍である．

一方，この人工衛星から打ち出すロケットの速さを V とすると，地球から見て，ロケットは $v+V$ の速さをもっている．このとき，力学的エネルギーは

$$E = \frac{m}{2}(v+V)^2 + \left(-G\frac{mM}{6R}\right) \tag{7.62}$$

ロケットが無限遠に到達するためには $E \geq 0$ なので，

$$v + V \geq \sqrt{\frac{gR}{3}} \tag{7.63}$$

よって，

$$V = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}\sqrt{gR} \tag{7.64}$$

となる．

宇宙ロケットの加速度　第 1 宇宙速度，第 2 宇宙速度を与えることは，経済的にも技術的にも容易ではない．そのため，実際のロケットはガスを噴射しながら加速していくことで，宇宙速度にいきなりならなくても打ち上げられるように工夫している．

さらに第 1 宇宙速度程度の速さで地球の重力圏を脱出する工夫もなされている．わざとロケットを月や地球以外の惑星に接近させ，この惑星の重力によって引っ張ってもらい，加速させるのである．これを「スウィングバイ」とよぶ（図 7.16 参照）．

図 7.16　惑星を利用したロケットの加速，スウィングバイ．

演習問題 7

A

1. **恒星の質量の導出**

ある恒星に 1 つの惑星があることが観測された．この軌道は円軌道で半径は r，公転周期は T であった．このことから，この恒星の質量を導出せよ．

2. **彗星の角運動量**

右図に示すように，太陽に向かって速さ v_0 で近づいていく彗星がある．この彗星が太陽に一番接近したときの速さは v，太陽からの距離は R であったとする．太陽への接近の仕方は図のように b だけずれていたとして，v_0 を求めよ．

3. **月の衛星**

地球の質量を M，半径を R，万有引力定数を G とする．

(a)　地球の表面上での重力加速度 g を，M, R, G で表せ．

(b) 質量 m の物体が地球の回りを速度の大きさ v で円運動しているとして以下の問いに答えよ．
  i. 円運動の半径 r を求めよ．
  ii. 円運動の周期 T を求めよ．
  iii. r と T の間の関係式を求めよ．

(c) 人工衛星が地球の表面すれすれに円運動しているとして，そのときの速度を求めよ．g=9.8 m/s^2，R=6400 km とすると秒速いくらになるか．

(d) この人工衛星が地球を 1 周する時間はいくらか．

(e) 静止衛星の位置は地球の中心からどの程度の距離にあるか？ケプラーの法則から求めよ．

(f) 月の半径は地球の 1/4，重力加速度は 1/6 である．月の表面すれすれに円運動している月観測衛星 “かぐや” の周期は？

(g) 上の数値から，月と地球の密度の比を求めよ．

4. 惑星からの脱出

(a) 地球の質量を M，半径を R，万有引力定数を G とする．地球の表面上での重力加速度 g を，M, R, G で表せ．

☞ 3.(a) を解いた人はとばしてよい．

$t=0$ において，地表から鉛直方向に速さ v_0 で質量 m の物体を打ち上げた．空気抵抗は無視できるとする．

(b) 物体が地表からの高さ z (地球の中心からだと $R+z$) に達したとき，ポテンシャルエネルギーはいくらか．答えを m, g, R, z で表せ．

(c) 物体が地表からの高さ z (地球の中心からだと $R+z$) に達したとき，速さはいくらか．答えを v_0, g, R, z で表せ．

(d) $v_0=V$ で，物体は無限遠に到達できるようになった．V の値は脱出速度とよばれる．V を g, R で表せ．

(e) この初速 V で打ち出したとき，高さ z における速度は

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{\frac{2gR^2}{z+R}}$$

となることを示せ．

(f) 上の微分方程式を解いて，

$$z=\left(\sqrt{R}^3+\frac{3}{2}\sqrt{2gR^2}t\right)^{2/3}-R=R\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2g}{R}}t\right)^{2/3}-R$$

を示せ．示せないときは，微分方程式に代入して示してもよい．

(g) z を t の 2 次までマクローリン展開（$t=0$ のまわりのテーラー展開）を行い，1 次，2 次の項それぞれの物理的な解釈をせよ．また，3 次の項の符号はプラスか，マイナスか．