9 剛体の運動

9.1 剛体の運動

剛体の運動　**剛体**は，かたい物体のことで，運動中に変形しないものをさす．剛体といえども，この中の微小部分を考えれば，それらはすべてニュートンの運動方程式にしたがって運動しているから，剛体全体の運動もニュートンの運動方程式から導出される．

いま，剛体がある回転軸（一定軸=方向が不変な軸）のまわりに，角速度 ω で回転している場合を考えよう（図 9.1）．このとき，剛体に考えた微小部分（質量 Δm）もまた，角速度 ω で回転する．

図 9.1　剛体の回転

角速度 ω を変化させるものは，各部分に加わる力のモーメントの総和である．微小部分に加わる力のモーメントを n と書くと，全体の力のモーメントの総和 N は，

$$N = n \text{ の総和} \tag{9.1}$$

となる．

さて，微小部分は角速度 ω，半径 r で円運動するから，その角運動量 ℓ の時間変化率が力のモーメントになる（7.2 参照）．

$$\frac{d\ell}{dt} = n \tag{9.2}$$

あるいは,

$$(\Delta m)r^2\frac{d\omega}{dt}=n \tag{9.3}$$

ここですべての微小部分について和をとる．ω はすべての微小部分で同じ値をとり，よって $d\omega/dt$ は共通であるので,

$$I\frac{d\omega}{dt}=N \tag{9.4}$$

の形が得られる．ここで I は $(\Delta m)r^2$ という値の総和で，**慣性モーメント**とよばれる．

まわりにくさの程度　上で求めた式で，N が一定の場合，I が大きいほど

$$\frac{d\omega}{dt}\propto\frac{1}{I} \tag{9.5}$$

となるので，$\dfrac{d\omega}{dt}$ は小さくなる．つまり，角速度の変化率は小さくなるわけである．このことから，I の大きさは,「回転しにくさ」を表していることがわかる．

ここでニュートンの運動方程式を考えてみよう．

$$m\frac{dv}{dt}=F \tag{9.6}$$

右辺の F が一定ならば，上の式は,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m} \tag{9.7}$$

を表す．つまり，m が大きいほど，速度の変化率は小さい．この意味で質量 m は「加速されにくさ」「動きにくさ」を表していた．

このようにして m と I，v と ω，F と N が対応関係にある．また，N は F に対応しているとすると，(9.2) 式より，角運動量 $I\omega$ は運動量 p に対応することがわかる．

$$\begin{array}{ccc} m & \leftrightarrow & I \\ v & \leftrightarrow & \omega \\ p & \leftrightarrow & I\omega \\ F & \leftrightarrow & N \end{array} \tag{9.8}$$

たとえば，質点の運動エネルギー K は

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \tag{9.9}$$

であったから，上記の対応から**回転の運動エネルギー**は

$$\text{回転の運動エネルギー }(K)=\frac{1}{2}I\omega^2 \tag{9.10}$$

となる．

慣性モーメントカー　エコカーとして注目される電気自動車，あるいはハイブリッドカーは，主に夜間に余った電気を充電したり，減速走行中に充電して，バッテリーに電気を蓄え，これによりガソリンを節約する．ところがアメリカなどで研究されているのは，バッテリーという取り扱いにくいものを使わず，大きな円板を夜間にモーターで回転させ，回転の運動エネルギーをたっぷり蓄え，これによって昼間，自動車を走らせるというものである．

☞ 原子力発電は，なるべく一定量の発電をするように運転した方が効率がよい．昼はオフィス，工場が電力を使うので電力消費量が多く，それをまかなうように発電するため，夜間の電力は余ってしまうのである．そのため，契約によっては夜間の電力を安くし，なるべく夜間に電力を使ってもらうようにしている．

これが可能ならば，電力会社などでも，夜間に余った電気を，慣性モーメントが大きな円板の回転の運動エネルギーとして蓄え，昼間このエネルギーで発電して家庭に送電すればよい．実際にこのような「慣性モーメント充電」というべき蓄電方式は，東京電力などで研究された．

☞ 回転でなく通常の運動エネルギーを蓄える場合，非常に長い場所が必要となる．一方，回転運動の場合，場所はコンパクトですむ．

これらの装置で大事なポイントは，回転の運動エネルギーを大きくするために，慣性モーメント I の大きいものを作り，なおかつ，夜間にこれをなるべく高速で回転させることである．しかし回転の角速度 ω をやたらに大きくはできない．ω が大きくなると，騒音問題も発生する．よって，なるべく大きな I の物体を作り，ω は大きくなくても回転の運動エネルギーは大きくできるものが必要となる．

このような大きな I を実現するためには，どのような質量分布がよいであろうか．

$$I = \Delta m r^2 \text{の総和} \tag{9.11}$$

であるから，質量が回転軸からなるべく遠く（r が大きな位置）に配分されていると，慣性モーメントが大きくなる．たとえば図 9.2 のように，質量が半径 a の円板に一様に分布しているよりは，質量が円板の縁にのみ分布している方が，I は大きい．自転車の車輪の形が図 9.2 の (b) のようなリング状になっているのはこのためである．

☞ 円板の慣性モーメントについては，演習問題 9.1 を参照．

図 9.2　円板とリングの慣性モーメント

剛体の運動方程式　剛体の運動方程式

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \tag{9.12}$$

を，角運度量の総和 L を用いて，

$$\frac{dL}{dt} = N\ ,\ (L = I\omega) \tag{9.13}$$

と書くことができる．ここに

☞ これは $m\,dv/dt = dp/dt$ とすることに対応している．

$$L = \ell の総和 = (\Delta m)r^2\omega の総和 \tag{9.14}$$

である．もちろん，$N = 0$ の場合，$L =$ 一定 であり，角運動量の保存則が成り立つ．

先にスケートのスピンについて触れたが（7.2 節），スケート選手が腕を伸ばしていると I は大きく，うでを縮めていると I は小さい．後者の方がスケート選手の身体の質量分布が回転軸の近くにあるためである．

$$L = I\omega = 一定 \tag{9.15}$$

より，I が小さい方が ω は大きくなる．

剛体の回転の運動方程式は一般化できる．力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{9.16}$$

で定義する．角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いて，

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{9.17}$$

と書ける．これより一般に

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{9.18}$$

となる．あるいは，

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{9.19}$$

である．これは質点の運動方程式

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{9.20}$$

に対応する．

運動方程式 (9.19) の中の $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ は，ω の大きさの変化率だけでなく，$\boldsymbol{\omega}$ の方向の変化率も含んでいる．つまり，回転軸方向が時間的に変化する場合も記述できる．これらの運動はたとえば，コマの歳差運動でみられる．

9.2　慣性モーメントの計算

棒の慣性モーメント　慣性モーメント I を計算するためには，剛体の微小部分について，Δmr^2 を足し合わせればよい．簡単なのは，長さ ℓ の軽い棒の両端に質量 m の質点がついている場合である．重心のまわりの慣性

☞ この例は非常に簡単であるが，重要である．2 原子分子 O_2, N_2 分子などの運動はこの慣性モーメントで記述される．

モーメントは，この場合，

$$I = 2 \times m \times \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{2} \tag{9.21}$$

となる．

次に質量 M，長さ ℓ の棒を，棒の中心を通る軸のまわりで回転させる場合を考えよう（図 9.3）．回転軸から x の位置に Δx という微小部分を考えると，棒の線密度は M/ℓ であるので，

$$\Delta m = \left(\frac{M}{\ell}\right)\Delta x \tag{9.22}$$

したがって，

$$\begin{aligned} I &= (\Delta m) r^2 \text{の総和} \\ &= \left(\frac{M}{\ell}\right) x^2 \Delta x \text{ の総和} \end{aligned} \tag{9.23}$$

となる．

ここで $x^2\Delta x$ の総和は積分で掛けることに注意しよう．

$$x^2\Delta x \text{ の総和} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx = \frac{\ell^3}{12} \tag{9.24}$$

よって，

$$I_{\text{棒}} = \frac{M}{\ell}\frac{\ell^3}{12} = \frac{1}{12}M\ell^2 \tag{9.25}$$

図 9.3　棒の慣性モーメント

いろいろな形に対するの慣性モーメントは積分によって計算できる．表 9.1 にその結果を示す．

慣性モーメントの関係式　表 9.1 に示したのは，重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントである．もちろん，これとは別の任意の回転軸のまわりの慣性モーメントも，同じような積分をすることによって求められる．

表 9.1　いろいろな剛体に対する慣性モーメント．回転軸は重心を通るとする．そうでない場合も式 (9.27)，式 (9.28) から求めることができる．

剛体の形	回転軸（重心を通るとする）	慣性モーメント I
長さ ℓ の棒	棒に垂直	$\dfrac{1}{12}M\ell^2$
長方形 (辺の長さ a, b)	辺 b に平行	$\dfrac{1}{12}Ma^2$
立方体 (辺の長さ a)	面に垂直	$\dfrac{1}{6}Ma^2$
半径 a の円板	面に垂直	$\dfrac{1}{2}Ma^2$
半径 a のリング	面に垂直	Ma^2
半径 a の球	任意	$\dfrac{2}{5}Ma^2$
半径 a の球殻	任意	$\dfrac{2}{3}Ma^2$

たとえば，図 9.4 に示すように，長さ ℓ の棒の重心のまわりの慣性モーメントがわかれば，そこから h だけ離れた回転軸のまわりの慣性モーメントは，原点を Y' にとると，

$$\begin{aligned} I &= \frac{M}{\ell}\left\{\int_0^{\frac{\ell}{2}-h} x^2 dx + \int_0^{\frac{\ell}{2}+h} x^2 dx\right\} \\ &= \frac{M}{\ell}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{\ell}{2}+h\right)^3 + \left(\frac{\ell}{2}-h\right)^3\right\} \\ &= \frac{M\ell^2}{12} + \frac{M}{\ell}(\ell h^2) = I_G + Mh^2 \end{aligned} \tag{9.26}$$

となることがわかる．

図 9.4　長さ ℓ の棒の重心を通る軸と，それから h だけ離れ，平行な軸のまわりでの慣性モーメント

一般に，重心を通る回転軸 Y のまわりの慣性モーメント I_G がわかると，この Y に平行で，それより h だけ離れている回転軸 Y' のまわりの慣性モー

メント（図 9.5）は

$$I = I_G + Mh^2 \tag{9.27}$$

なる関係式で求めることができる．

図 9.5　重心を通る軸とそれに平行な軸のまわりでの慣性モーメント

またうすい板の場合，板面に x, y 軸をとり，これに垂直に z 軸をとると（図 9.6），それぞれのまわりでの慣性モーメント，I_x, I_y, I_z の間には，関係式

$$I_z = I_x + I_y \tag{9.28}$$

が成立している．

図 9.6　うすい板での慣性モーメント，I_x, I_y, I_z

9.3　簡単な運動

滑車の運動　半径 a，質量 M の滑車（慣性モーメントは $I_G = \dfrac{1}{2}Ma^2$）に，ひもを巻き，これに質量 m のおもりをつるす（図 9.7）．このときのおもりの下降する加速度を求めてみよう．ただし，ひもはすべらないとする．

滑車の回転の運動方程式は，

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \tag{9.29}$$

である．ひもの張力を T とすると，

$$N = aT \tag{9.30}$$

である．

図 9.7　滑車につるされるおもり

一方，下降するおもりの運動方程式は，鉛直方向下方を正として，

$$m\frac{dv}{dt} = mg - T \tag{9.31}$$

である．これらの関係式から N, T を消去して，

$$I\frac{d\omega}{dt} = a\left(mg - m\frac{dv}{dt}\right) \tag{9.32}$$

となる．ここで滑車にかかっているひもの速度は物体の落下速度に等しく，その大きさは $a\omega$ になっていることから

$$mga = \frac{1}{2}Ma\frac{dv}{dt} + ma\frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{m}{m + \frac{M}{2}}g \tag{9.33}$$

となる．

ヨーヨーの運動　ヨーヨーは上に述べた滑車をぶら下げたようなものである（図 9.8）．通常，糸は中心の回転軸のまわりの小さな円板に巻き付いているが，ここでは簡単のため，円板の外側に巻き付いているとする．

円板の半径を a，質量を M とすると，力のモーメントは，糸の張力を T として，$N = aT$ で与えられる．運動方程式は，

$$\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\frac{d\omega}{dt} = aT \tag{9.34}$$

図 9.8　ヨーヨーの上下運動

一方，円板の中心は，加速度 $\dfrac{dv}{dt}$ で下降運動をする．その運動方程式は

$$M\frac{dv}{dt} = Mg - T \tag{9.35}$$

である．これらの式を組み合わせ，糸が滑らないとして $a\omega = v$ を使うと

$$\frac{1}{2}Ma\frac{dv}{dt} = a\left(Mg - M\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\therefore \frac{3}{2}\frac{dv}{dt} = g$$

よってヨーヨーの下降加速度は

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}g \tag{9.36}$$

となり，自由落下のときに比べて，3 分の 2 に減少していることがわかる．

なお，糸の張力 T は，式 (9.34) より

$$T = \frac{M}{2}\frac{2g}{3} = \frac{Mg}{3} \tag{9.37}$$

となる．

☞ これよりヨーヨーを離し，ヨーヨーが上下運動を始めると，軽く感じることが説明できる．

坂道を転がるタイヤ　傾斜角 θ の坂道をタイヤが転がる場合も同様に考えることができる（図 9.9）．タイヤの質量を M，半径を a とする．タイヤと坂道との間の摩擦力を F とすると，力のモーメントは

$$N = aF \tag{9.38}$$

である．よって回転の運動方程式は，

$$I\frac{d\omega}{dt} = aF \tag{9.39}$$

一方，タイヤは坂道に沿って下降運動するから，その重心の運動方程式は，

$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\theta - F \tag{9.40}$$

図 9.9　坂道を転がるタイヤ

となる．これらの式から F を消去して，$a\omega = v$（タイヤがスリップしないという条件）を使うと

$$\begin{aligned} M\frac{dv}{dt} &= Mg\sin\theta - \frac{I}{a}\frac{d\omega}{dt} \\ &= Mg\sin\theta - \frac{I}{a^2}\frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \left(M + \frac{I}{a^2}\right)\frac{dv}{dt} &= Mg\sin\theta \\ \therefore\ \frac{dv}{dt} &= \frac{Mg\sin\theta}{M + I/a^2} \end{aligned} \tag{9.41}$$

ここでタイヤはほぼ一様な質量分布をしていると見なすと，慣性モーメントは円板と同じ $Ma^2/2$ になり，

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3}g\sin\theta \tag{9.42}$$

となる．これはヨーヨーの加速度の表式 (9.36) で g を $g\sin\theta$ に置き換えたものである．

演習問題 9

A

1. **円板の慣性モーメント**

質量 M，半径 a の円板の慣性モーメントを求めよ．

2. **薄い板の慣性モーメント**

表 9.1 を用いて，長方形の重心を通り，長方形に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めよ．

3. 坂道を転がる自転車のタイヤ

半径 a，質量 M の自転車のタイヤを考える．

(a) スポークの重さは無視できるほど軽いとする．慣性モーメントはいくらか．

(b) 式 (9.41) を使って，傾斜角 θ を転がり落ちる自転車のタイヤの加速度を求めよ．