第1章　数学の基礎

本章では今後、物理を学ぶ上で必要な数学を学ぼう。

1.1　内積・外積

まず内積は以下のように定義される。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{1.1}$$

θ は $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ のなす角度である。線形代数学（数学）でやるようにこれは一般の次元で定義されるが、物理の場合は２，３次元の応用が主である。この値はスカラーで座標の回転しても不変である。

つぎに外積を考えよう。これは三次元ベクトルで定義される。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= (a_1,a_2,a_3)\\ \boldsymbol{b} &= (b_1,b_2,b_3)\\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\end{aligned} \tag{1.2}$$

向き：$\boldsymbol{a}$から$\boldsymbol{b}$の方向へ右ねじをまわしたときに進む方向
大きさ：$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$
θ：$\vec{a},\vec{b}$ のなす角

この成分表示が、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ と垂直であることは、

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=0$$

であることからわかる。また大きさが $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ となるのは、

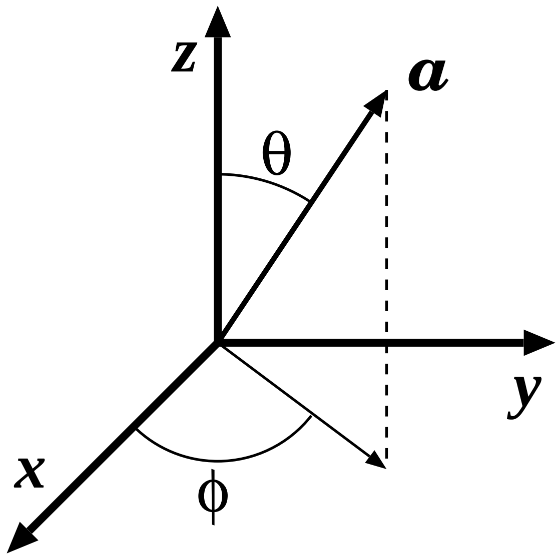
$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$$

から示される。

内積の表式のより難しい説明

球座標をつかうと

$$\boldsymbol{a}=a(\sin\theta_1\cos\phi_1,\sin\theta_1\sin\phi_1,\cos\theta_1),\boldsymbol{b}=b(\sin\theta_2\cos\phi_2,\sin\theta_2\sin\phi_2,\cos\theta_2)$$



となる。これより、

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2))$$

となる。この $\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$ は余弦定理から $\cos\theta$ となることがわかる。
外積の性質は上の定義から次のようになる。

1.
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{1.3}$$

2.
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{1.4}$$

3.
$$(k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) \tag{1.5}$$

4.
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{1.6}$$

Problem 1.1 以下の式を成分表示で証明せよ。

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d} &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) && (1.9)\\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) && (1.10)\end{aligned}$$

1.2　偏微分

今まで習ってきた関数は主に１変数関数であったと思う。しかし大学では多変数関数を考えることが多い。例えば、山の高さは$h(x,y)$という緯度と経度の関数だし、川の流れは$(v_x(x,y),v_y(x,y))$で表される。そこでこうした関数の微分を考える。

偏微分とは、ある変数に関して微分して、残りの関数は定数とみなすものである。２変数の場合の定義は

$$\frac{\partial f}{\partial x}\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \tag{1.11}$$

である。ここで偏微分に関する重要な性質を証明しておく。

Theorem 1.1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \tag{1.12}$$

証明）

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}-\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right]\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta x}-\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\end{aligned}$$

∎

1.3　全微分

たとえば、x,yが時間の関数で同時に変化していたとする。このとき、関数$f(x,y)$の変化は

$$\Delta f = f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \\
&= \Delta y \frac{\partial}{\partial y} f(x+\Delta x, y) + \Delta x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\
&\approx \Delta y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \Delta x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}
\end{aligned}
$$

こうして、変化が無限小として

$$
\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{1.13}
$$

をうる。逆に

$$
\mathrm{d}f = g\mathrm{d}x + h\mathrm{d}y \tag{1.14}
$$

とかけていれば、(1.12) より

$$
\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \tag{1.15}
$$

となっていることが、$\mathrm{d}f$ が全微分であるための条件となる。つまりある微分形がこの条件を満たしていれば、x, y の値だけで決まる関数 $f(x,y)$ が存在するということである。

1.4　ナブラ記号

　これから議論するのは 3 次元空間での粒子の振る舞いであるので、偏微分 $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ が頻繁に出てくる。しかもこれらは対称な形で出てくるので、いっぺんにまとめて書いた方がよい。そこでベクトル、

$$
\nabla \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.16}
$$

を考える。たとえばこれが関数 $f(x,y,z)$ に作用すると

$$
\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f, \frac{\partial}{\partial z}f\right) \tag{1.17}
$$

となる。これは勾配 (gradient) を表しているので

$$
\nabla f = \mathrm{grad} f \tag{1.18}
$$

とも書く。

　こんどはこれがベクトル $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ に作用したとする。内積は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ であったことを思い出して、

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{v} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.19}
$$

と定義する。これを div と書くのは、流れのわき出し (divergence) に関係しているからである。

さて、内積が出てきたら次は外積である。これは

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \tag{1.20}$$

で定義されていたことを思い出すと、

$$\nabla \times \boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = (\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}) \tag{1.21}$$

なぜこれを rot と書くかというと、これは流れの回転 (rotation) に関係しているからである。

ここで grad と div と rot に関して重要な性質をあげておく。

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = \nabla \times (\nabla f) \equiv \boldsymbol{0} \tag{1.22}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) \equiv \boldsymbol{0} \tag{1.23}$$

Problem 1.2 *(1.22),(1.23)* を証明せよ。

Problem 1.3 以下の恒等式を証明せよ。

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{1.24}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) = (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) \tag{1.25}$$

1.5　ガウス (Gauss) の定理

ベクトル $\boldsymbol{v}$ を微小体積の立方体の面上で積分することを考える。このとき、$\boldsymbol{v}$ の面に関して垂直な成分を積分するとすると、結局流れ出す量を計算したことになる。

x 方向に垂直な面に対してこの積分をまず行おう。面は小さいとしてこの面上ではベクトルの値は一定だとする。するとこの流量は

$$[v_x(x + \Delta x, y, z) - v_x(x, y, z)]\Delta y \Delta z \approx \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

となる。同様に y, z 方向の流量は

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \ , \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

となるので、これらを合計すると、この立方体から流れ出す量は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}\Delta x\Delta y\Delta z$$

となる。

　こうした微小体積の立方体を組み合わせれば、結局任意の形状を作ることができるので、結局以下の定理が導かれる。

Theorem 1.2 (ガウスの定理) 閉じた立体を考え、それに垂直で外側を向いた単位ベクトル $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ を考える。このとき

$$\int(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = \int \mathrm{d}V\mathrm{div}\boldsymbol{v} \tag{1.26}$$

これは体積積分と面積積分を結びつける便利な定理であり、今後、特に電磁気学でよく出てくる。

1.5.1　ガウスの定理の系

　定数ベクトル $\boldsymbol{c}$ を使って，$\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v}$ と置き換えると

$$\int([\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = \int \mathrm{d}V\mathrm{div}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v}) \tag{1.27}$$

となる。$\mathrm{div}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{c}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ なので

$$\int([\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = -\int \mathrm{d}V\boldsymbol{c}\cdot(\mathrm{rot}\boldsymbol{v}) \tag{1.28}$$

となる。

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n} = -(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{c} \tag{1.29}$$

なので,

$$\int \mathrm{d}S(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}) = \int \mathrm{d}V\mathrm{rot}\boldsymbol{v} \tag{1.30}$$

をうる。

　また，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}\Phi$ とするとガウスの定理は

$$\int(\boldsymbol{c}\Phi)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int \mathrm{d}V\mathrm{div}(\boldsymbol{c}\Phi) \tag{1.31}$$

となる。$\mathrm{div}(\boldsymbol{c}\Phi) = \boldsymbol{c}\cdot\mathrm{grad}\Phi$，$(\boldsymbol{c}\Phi)\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{c}\cdot\Phi\boldsymbol{n}$ なので

$$\int \mathrm{grad}\Phi\mathrm{d}V = \int \Phi\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.32}$$

をうる。これも一種のガウスの定理である。

1.5.2　グリーン (Green) の定理

ガウスの定理 (1.26) 式から以下の公式が導かれる。$\boldsymbol{v} = \phi \mathrm{grad}\psi$ とおいて

$$\mathrm{div}(\phi \mathrm{grad}\psi) = \phi\nabla^2\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi \tag{1.33}$$

を代入する。ここで

$$\nabla\psi\cdot\boldsymbol{n} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial\psi}{\partial n} \tag{1.34}$$

という定義を用いると，

$$\int \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S = \int \mathrm{d}V(\phi\nabla^2\psi + \nabla\psi\cdot\nabla\phi) \tag{1.35}$$

となる。これをグリーンの第一恒等式とよぶ。ϕ, ψ を入れ替えて，引き算を行うことでグリーンの定理が導かれる。

Theorem 1.3

$$\int \left[\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S = \int \mathrm{d}V(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi) \tag{1.36}$$

1.6　ストークス (Stokes) の定理

ガウスの定理は体積積分と表面積分を結びつける公式であった。ストークスの定理は面積分を線積分に結びつける公式である。ある微小な長方形を左回りで一周した積分を考える。このとき、

$$\begin{aligned}
\int \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= v_x(x+\Delta x/2, y, z)\Delta x + v_y(x+\Delta x, y+\Delta y/2, z)\Delta y \\
&+ v_x(x+\Delta x/2, y+\Delta y, z)(-\Delta x) + v_y(x, y+\Delta y/2, z)(-\Delta y) \\
&\approx -\Delta x\left[\frac{\partial}{\partial y}v_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\right] + \Delta y\left[\frac{\partial}{\partial x}v_y\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z\right)\Delta x\right] \\
&\approx \Delta x\Delta y\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right] = (\nabla\times\boldsymbol{v})_z\Delta x\Delta y
\end{aligned}$$

$$= \int \mathrm{d}S\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

これは $x-y$ 平面にある長方形の周りについて証明したのだが、これを次々と適用すれば、任意の閉曲線に関してこれが成り立つことがわかる。さらにこの閉曲線が $x-y$ 平面になくても成立し、結局以下の定理が成り立つ。

Theorem 1.4 (ストークスの定理) 任意の閉曲線について、これに沿った方向の積分を考える。この閉曲面に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\int \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \mathrm{rot}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1.37}$$

が成立する。この閉曲面の選び方は任意である。

Problem 1.4 この閉曲面の選び方が任意であることを証明せよ。

Problem 1.5 *(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)* を角に持つ長方形を考える。これについて $\boldsymbol{v} = (-y, x, 0)$ を積分して、ストークスの定理を確かめよ。

1.7　初等関数

今度は物理によく出てくる関数を復習しておく。まずテイラー展開というものを学んでおく。これは

Theorem 1.5 (テイラー (Taylor) 展開) 関数 $f(x)$ の性質が x_0 でよくわかっている、つまりその値と微分が高次までわかっている場合、

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{1.38}$$

と表せる。特に $x_0 = 0$ の場合をマクローリン *(Maclaurin)* 展開という。

e^x は微分しても変わらないという性質を持っている。

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x \tag{1.39}$$

$x_0 = 0$ のまわりに展開すると、

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{1.40}$$

となる。確かにこれは微分しても変わらない。次に三角関数をマクローリン展開してみよう。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{1.41}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{1.42}$$

さて x のかわりに $\mathrm{i}x$ を代入すると

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1 + \mathrm{i}x - \frac{x^2}{2!}x - \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}\frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{1.43}$$

こうしてオイラー (Euler) の公式、

$$\exp(\mathrm{i}x) = \cos x + \mathrm{i}\sin x \tag{1.44}$$

が証明できる。

このように三角関数と指数関数は親戚関係にある。三角関数を指数関数で表すと

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\ ,\ \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \tag{1.45}$$

となるので、新しく

$$\sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \tag{1.46}$$

$$\cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \tag{1.47}$$

$$\tanh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1.48}$$

を定義しよう。これらは双曲線関数と呼ばれる。双曲線関数の場合、

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\ ,\ 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{1.49}$$

という関係式がある。三角関数の場合の

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\ ,\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

とは、微妙に違うことに注意しよう。

三角関数の微分は

$$\sin' x = \cos x\ ,\ \cos' x = -\sin x\ ,\ \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{1.50}$$

となるが、双曲線関数は

$$\sinh' x = \cosh x \tag{1.51}$$

$$\cosh' x = \sinh x \tag{1.52}$$

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{1.53}$$

となる。

指数関数の逆関数が対数関数である。これは

$$y = \log x\ ,\ \mathrm{e}^y = x \tag{1.54}$$

で定義される。そこで

$$\exp(y + \Delta y) - \exp(y) = x + \Delta x - x$$

より

$$\exp(y)\Delta y \approx \Delta x$$

をうるので、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{x} \tag{1.55}$$

をうる。これから積分公式、

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log x + C \tag{1.56}$$

をうる。では $\log|x|$ の微分はどうであろう？$x < 0$ では $\log|x| = \log(-x)$ なので

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \tag{1.57}$$

となる。よって

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x| + C \tag{1.58}$$

が導かれる。

このように指数関数、対数関数、三角関数は互いに切っても切れない関係にある。これらをまとめて**初等関数**とよぶ。