1 はじめに

物理学は自然界で起こるさまざまな現象を論理的に解明する．
解明すると言うことは単に説明するだけでなく，このような状況では何が起こるはずだと言うことを予言することを含む．入試問題で「ある条件で $\cdots$ の値はどうなるか」ときかれたとき，みなこの予言を行ったわけである．

☞ ノーベル物理学賞受賞者である朝永振一郎博士の名著「物理学とは何だろうか」（岩波新書）によると，「物理学とは，われわれをとりかこむ自然界に生起するもろもろの現象ーただし主として無生物に関するものーの奥に存在する法則を，観測事実によりどころを求めつつ追求すること」である．

物理学は，自然現象の観察，実験，数式による考察（実験と対比させて理論とよぶ）が互いに刺激しあって発展してきた．最近では，コンピュータシミュレーションによる模擬的な実験も物理学の発展に多く寄与している．このように物理学は様々な手法を生かして問題にアプローチするのである．また，その発展も様々な経緯をたどっている．たとえば力学はそれまで観測されていた自然現象（天体の運動）をニュートンが体系化したものである．相対性理論はアインシュタインが物理法則の普遍性と整合性から構築したもので，実験的に実証されたのはその後である．

物理学は自然現象を研究するためだけにあるのではない．物理学を応用することにより科学技術は発展をとげた．本書では物理学の重要な概念を学ぶ．物理学は与えられた現象を数式で記述して解くというのが主であるが，対称性，保存則などを駆使して自然現象を解明するという面を忘れてはならない．むしろ，この対称性や保存則を使いこなす方が重要な場合も多い．たとえば落下問題を扱う場合，空気抵抗のある場合の運動方程式を解くのも重要であるが，これをエネルギーの保存則から考察するのも重要である．

☞ エネルギーの保存則からいえるのは「エネルギーは無から創り出せない，できるのはすでに存在するエネルギーを変換することだけである」ということである．環境問題を考える上でもこの原則を忘れてはならない．

1.1 物理量と次元解析

次元と単位　物理学で扱う数字，数式は最終的には実験や観測で測定できる**物理量**である．速度，運動量，エネルギー，位置，電場，磁場，温度などはすべて物理量である．これらは**次元**をもっている．長さの次元を L, 時間は T, 質量は M と表す．たとえば，エネルギーの次元は $\mathrm{ML}^2/\mathrm{S}^2$ となる．

ある次元をもつ物理量を，数値で表現するには**単位**を決める必要がある．たとえば，長さの次元を表すには，m を用いるか，cm を用いるかでその物理量を表す数値が 100 倍異なる．

質量，速度，エネルギーなどの物理量の次元を指定するには，[ ] を用いる．たとえば，速度 v の次元は $[v]$ と表す．速さの次元を m/s の単位で表す場合，10 m/s と記す．

☞ 速さ v やエネルギー E などの変数には，次元が含まれていると考える．たとえば速さ v には次元 L / T が含まれている．

次元解析　次元を間違えて減点されたり，cm を m と間違えるなどして答えが見当違いな値になったという苦い経験をした人もいるであろう．しかし，次元と単位はたいへん有用なものなのである．たとえば自分が得た解答のチェックに**次元解析**を使うことができる．静止している物体が h だけ落下したのちの速さは，$\sqrt{2gh}$ である．g の次元 $[g]$ は $\mathrm{L/T^2}$，h の次元 $[h]$ は L なので，$\sqrt{2gh}$ の次元は $(L/T^2 \times L)^{1/2} = L/T$ となり，確かに速さの次元である．これが平方根を忘れて答えを $2gh$ としていたり，質量が入ってきて $\sqrt{2gh/m}$ としたりしていても，次元解析を行えばすぐにミスが発見できる．

それだけではない．物理の問題を考える際，あらかじめその現象を考察，観察し，数式で解析する前段階として，物理の専門家は次元解析を頻繁に行うのである．ガリレオが観測した振り子の等時性を考えてみよう．振り子の運動は，振り子の質量 m，重力加速度 g，振り子の長さ l，振り子の振幅 A などで決まっていると一般に考えられる．ところが観測から，周期 T は質量には依存しない，振幅にも近似的には依存しないことがわかった．すると周期は g, l のみで決まっていることになる．g, l から時間の次元を作るには

$$T = [g^x l^y] = (L/T^2)^x L^y = L^{x+y} T^{-2x}$$

となる．右辺と左辺から $x + y = 0, 2x = -1$ となり，$x = -1/2, y = 1/2$，言い換えると周期 T は $\sqrt{l/g}$ を因子として含んでいることがわかる．運動方程式を解くと $2\pi\sqrt{l/g}$ が得られるが，運動方程式，単振動などを知らなくてもある程度の解析が行えるのである．

もっと複雑な場合の例として，飛行機の揚力を考える．そこでこの飛行機の翼が幅 W，長さ L の長方形だと仮定して，これが密度 ρ の大気中を大気との相対速度 v で飛んでいるとする．揚力は翼の幅に比例しているだろう．そこで，

$$F_{\text{揚力}}/W = k\rho^x v^y L^z \tag{1.1}$$

と仮定する．k は無次元量である．両辺の次元を等しいとすると

$$(ML/T^2) \times L^{-1} = (ML^{-3})^x \times (L/T)^y \times L^z$$

が得られ，これより $x = 1, y = 2, z = 1$，つまり

$$F_{\text{揚力}} = k\rho v^2 LW \tag{1.2}$$

であることがわかる．実験から k の値は 0.5 程度だとわかっている．乱暴ないい方をすると，揚力に現れる係数 k をいかに大きくするかが，設計の工夫のしどころであり，あとは次元解析で決まってしまっているのである．

演習問題 1

A

1. 質量 m の物体がバネ定数 k のバネに結ばれ，振動している．

(a) バネ定数の次元を L, M, T で表せ．

(b) 振動の周期が $m^x k^y$ に比例していること，比例定数は無次元であることを仮定し，x, y を求めよ．

☞ 高校時代に物理を履修しなかったものは，この問は飛ばしてよい．

2　力，力のつり合い

2.1　力

力の働き　物体が変形したり，運動の向き，方向などが変化したり速さが変わったりするのは，力が働くからである．力のもう少し正確な定義は後で述べるが，様々な運動状態を変化させる原因となるのが力である．ある物体が力を受けている場合，それに力を加える他の物体の存在が考えられる．一見，他の物体が存在しないような場合も，物体の周りには，力を生じさせる空間の状態の変化（**場**の発生）がある．**電場**（**電界**），**磁場**（**磁界**）はその代表例である．

☞ 電場，磁場は第 12 章，第 15 章参照

図 **2.1**　様々な力

重さと質量　一般に固体，液体，気体を考えると，固体が一番原子・分子が密に詰まっているので，密度は大きい．**質量**とはこの密度に体積を掛けたものである．

☞ 水は例外的に 4 ℃で密度が最大になり，氷の方が軽い．

$$m = \rho V \tag{2.1}$$

密度は，物質を構成している原子・分子の種類と単位体積に含まれる個数で決まるもので，それぞれの物体に**固有な量**である．一方，地球上で，物体に働く**重力**は，質量と違い，物体固有の量ではない．たとえば，同じ物体を

☞ 密度は圧力は温度の関数であるから，ここではある温度，圧力下に置いてという意味である．

月面上に持って行くと，重力はおよそ6分の1に減ってしまう．質量は，その単位として kg（キログラム）を用いることが国際協定によって定められている (**SI単位系**)．これは，国際的な共通の目安として**キログラム原器**という基準物体の質量によって定義されている．一方，重力は力であるから，質量と単位が異なる．地球上で，1kg の物体に働く重力は 9.8N（ニュートン）である．一般に質量 m（kg）の物体に働く重力は

$$\boxed{F = mg(N)} \quad (g = 9.80655\cdots m/s^2) \tag{2.2}$$

となる．g の値は実際には場所により異なるが，それだと不便なので上記の値を標準値として採用している．

☞ フランス・パリ郊外セーヴルの国際度量衡局に、二重の気密容器で真空中に保護された状態で保管されている．真空にしておくのはさびさせないためである．

☞ たとえば地球は赤道方向が長径の回転楕円体と見なせる．よって赤道付近での重力加速度は小さめになり，北極，南極などの高緯度地域では大きめとなる．また遠心力の効果も赤道付近では重力加速度を見かけ上小さくするようにきいてくる．こうした差はゼロコンマ数パーセントである．

フックの法則　気体や液体はもちろんのこと，固体も強い力を加えると変形する．物体中に任意の単位断面 ($1m^2$) を考え，この単位面積あたりの変形を**ひずみ**いう．一方，ひずみを発生させる外部からの力を面積で割って単位面積あたりに換算したものを**応力**という．

一般に，応力が小さい場合には，ひずみと応力は比例する．しかも，応力がなくなるとひずみもなくなり，物体は元の形に復元される．これを**フックの法則**（Hooke's law）という．フックの法則が成り立つ物体の性質を**弾性**といい，このときの比例定数を**弾性定数**という．

ゴムひもは典型的な弾性体と見なされる．長さ ℓ のゴムひもに，F という力を加えると，それによってゴムひもは x だけ伸びる．このとき，F と x との間には

$$F = k\,x \tag{2.3}$$

なる関係が成り立つ．k は弾性定数である．バネの場合も同じことがいえ，この場合，k は**バネの定数**とよばれる．ゴムひもとバネの違いは，バネの場合，縮めても力が働くという点である．

鉛直につるされたバネに，重さ m（kg）の物体をつるすと，

$$\begin{aligned} mg &= kx \\ \therefore\ x &= \frac{mg}{k} \end{aligned} \tag{2.4}$$

だけ，バネが伸びることがわかる（図2.2）．

力とベクトル　力を考える際には，大きさの他に，方向・向きも大切な要素となる．これらの要素を同時に表すために，図に示すような適当な長さの矢印を用いる．図2.3には，ひきずられる物体に働く様々な力を，矢印で表してある．

大きさだけでなく，方向・向きをもち，なおかつ足し算（引き算），かけ算（割り算）が定められている量を**ベクトル**[1]（ベクトル量）という．ベクトルは $\boldsymbol{A}$ のように太字で表す[2]．力はベクトルで表される．

[1] 大きさはもつが方向も向きももたない量をスカラーという．

[2] 高等学校では $\vec{A}$ のように頭に矢印をつけて表していた．

図 2.2

図 2.3

ベクトルの加法則　ベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B}$ の足し算は**平行四辺形の規則**によって定義される．すなわち，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ とは，図 2.4 に示すように，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がつくる平行四辺形の対向頂点までのベクトルとなる．

これによって $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ も自然に定義できる．

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \tag{2.5}$$

の両辺に $\boldsymbol{B}$ を加えると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B} \qquad (2.6)\\ &= \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

すなわち，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ とは「これに $\boldsymbol{B}$ を加えると $\boldsymbol{A}$ になるようなベクトル」と定義される．(図 2.5 参照.)

三角関数　ベクトルの成分を考えるために，sin（サイン），cos（コサイン），tan (タンジェント）という**三角関数**が必要となるので，これを簡単

図 2.4　ベクトルの加法

図 2.5　ベクトルの減法．$\boldsymbol{B}$ の先から $\boldsymbol{A}$ の先に向かうような $\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ である

に復習しておこう．図 2.6 に示すように，角度 θ について

$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

である．この定義によって，$\sin 0^\circ = \cos 90^\circ = \tan 0^\circ = 0$，$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$，$\tan 45^\circ = 1$ となる．表 2.1 に代表的な値を示しておく．この表は簡単に暗記できる．$\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ について，sin，cos の値は $1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2$ の 3 通りしか現れない ($\sqrt{\ }$ の中に 1, 2, 3 が並んでいる)．角度が大きくなると sin の値は大きくなるので，この順番であり，cos は逆に角度が大きくなると小さくなるから，逆の順番，$\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2, 1/2$ となる．これを覚えてしまえば，tan は sin，cos の比であるので，覚える必要はない．

θ が 90° よりも大きいときの $\sin, \cos, \tan$ は図 2.7 のように円を描いて

図 2.6　三角関数の定義

表 2.1　三角関数の代表的な値

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	1	0
30°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$\pm\infty$

定義する．図に示すように，90° よりも大きい θ_2 について，

$$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ \tag{2.7}$$

のとき，

$$\sin\theta_2 = \sin(\theta_1 + 90^\circ) = \cos\theta_1 \tag{2.8}$$

$$\cos\theta_2 = \cos(\theta_1 + 90^\circ) = -\sin\theta_1 \tag{2.9}$$

なる関係がある．cos の場合，負号が現れることに注意しよう．一方，

$$\theta_3 = \theta_1 + 180^\circ \tag{2.10}$$

のときは

$$\sin\theta_3 = \sin(\theta_1 + 180^\circ) = -\sin\theta_1 \tag{2.11}$$

$$\cos\theta_3 = \cos(\theta_1 + 180^\circ) = -\cos\theta_1 \tag{2.12}$$

となる．原点に関して点対称の位置なので，$\sin, \cos$ 両方に負号がつく．

図 2.7　θ が 90° よりも大きいときの $\sin, \cos, \tan$

ベクトルの演算　以上述べた簡単な数学の規則を用いると，ベクトルの足し算などを式で表すことができる．平行四辺形を書くのは幾何学的な方法で，これから述べる方法は代数的な方法である．

まず，ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を直交座標 (x 軸，y 軸) で表す．$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の x, y 成分を A_x, A_y, B_x, B_y とすると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (A_x, A_y) \\ \boldsymbol{B} &= (B_x, B_y) \end{aligned} \tag{2.13}$$

と表現できる．図 2.8 を見ればわかるように，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ の x 成分は，それぞれの x 成分の和である．

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\text{の } x \text{ 成分} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_x = A_x + B_x$$

同様に

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\text{の } y \text{ 成分} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_y = A_y + B_y$$

したがって，

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y) \tag{2.14}$$

空間ベクトルの場合，x, y, z 軸を考え，

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \tag{2.15}$$

となる．

大きさ 1 のベクトルを**単位ベクトル**とよぶ．x 方向，y 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}$ とおくと便利である．これを用いると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{e_x} + A_y \boldsymbol{e_y} \\ \boldsymbol{B} &= B_x \boldsymbol{e_x} + B_y \boldsymbol{e_y} \end{aligned} \tag{2.16}$$

となり，

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\boldsymbol{e_x} + (A_y + B_y)\boldsymbol{e_y} \tag{2.17}$$

図 2.8　ベクトルの加法の成分表示

となる．これからもベクトルの和は成分の和でよいことがわかる．

例題 2.1　**ベクトルの表現**

x 軸と 30° の角をなす方向に引かれた図のような大きさ A のベクトル $\boldsymbol{A}$ がある．$\boldsymbol{A}$ の x 成分，y 成分（(A_x, A_y)）を求めよ．また，$x-y$ 軸を右回りに 30° 回転させた $x'-y'$ 軸（図参照）について，$\boldsymbol{A}$ の成分 (A'_x, A'_y) を求めよ．

解　作図により

$$A_x = A\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}A\ ,\ A_y = A\sin 30^\circ = \frac{A}{2}$$

$$A'_x = A\cos 60^\circ = \frac{A}{2}\ ,\ A'_y = A\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

2.2　力のつり合い

力のつり合い　力はベクトル量であるから，大きさの無視できる物体に複数個働いている場合，それらを加えたものが $\mathbf{0}$ になるとき，すなわち

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots = \mathbf{0} \tag{2.18}$$

のとき，静止してた物体は静止したままである．これを力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots$ は**つり合っている**という．

図 2.9　力のつり合いの例．ひもに結ばれた物体 (質量 M) に働く力のつり合い

力の合成と分解　力の和 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots$ を $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots$ の**合力**といい，合力を求める操作を**力の合成**という．力の合成は，数学的にはベクトルの足し算である．

1 つの力を 2 つの力に分ける操作を**力の分解**という．分解する方法はいくらでもあるが，問題を解きやすいように分解することが大切である．分解された力を**分力**という．

分解の代表的なやり方で，よく利用されるのは，x 成分，y 成分に分解するやり方である．

$$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{e_x} + F_y \boldsymbol{e_y} \tag{2.19}$$

力のつり合いを示す式 (2.18) を上のような分解したもので示すと，

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \cdots &= 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \cdots &= 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

となる．つまり，分解した成分ごとに和が 0 になるとき，力はつり合っている．

作用と反作用　物体どうしが相互に力をおよぼし合っているとき，それらの力は同一直線上にあり，互いに逆向きである．これを**作用・反作用の法則**という．図 2.10 に示すように，A 君と B さんが互いに押し合っていると

き，A 君が B さんから受ける力 $\boldsymbol{F}_{12}$ と B さんが A 君から受ける力 $\boldsymbol{F}_{21}$ の関係は，

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{2.21}$$

である．物体どうしが互いに接触しておらず，万有引力のように遠くに離れた天体どうしが力をおよぼし合う場合にも，作用・反作用の法則が成り立つ．作用・反作用の法則の物理的意味については，第 3 章で詳しく述べる．

2.3　いろいろな力

重力と電気力　　質量 m の物体が，地球上でうける**重力**は

$$F = mg \tag{2.22}$$

で，鉛直下向きである．この物体が，水平の机の上に静止しているときには，この物体の，重力による落下を止めるために，**抗力**が働く．抗力 N は

$$N - mg = 0 \tag{2.23}$$

となっている．抗力の源は，**電気的な力**である．

抗力は，常に面に垂直に働く．もしそうでないならば，物体は面に沿って力を受けて不安定になるからである．

重力 mg は，地球と物体の間に働く万有引力にほかならない．地球の半径を R, 質量を M とすると，

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \tag{2.24}$$

となる．G は**万有引力定数**である．万有引力は距離の 2 乗に反比例する．上の式より，

$$\boxed{g = G\frac{M}{R^2}} \tag{2.25}$$

となる．

図 2.10　作用・反作用の法則

図 2.11　天体間に働く力．作用・反作用の法則が成り立っている．

摩擦力　斜面上の物体が**摩擦**によって静止している（図 2.13）．斜面の傾き θ を大きくしていくと物体は滑り出す．滑り出す寸前には，斜面との摩擦力は最大になっている．これを**最大静止摩擦力**(**最大摩擦力**) という．このときの角度を θ_c とすると，重力の斜面方向の成分 $mg\sin\theta_c$ とこの最大摩擦力 f_0 がつり合っている．

$$mg\sin\theta_c = f_0 \tag{2.26}$$

これより，θ_c を測定すれば，f_0 を知ることができる．

測定結果から最大摩擦力 f_0 は物体に働く斜面からの抗力 N に比例する．

$$f_0 = \mu N \tag{2.27}$$

比例係数 μ は**静止摩擦係数**とよばれる．斜面に垂直な方向でも力はつり合っているので，抗力 N は

$$N = mg\cos\theta_c \tag{2.28}$$

図 2.12　重力と抗力のつり合い

図 **2.13**　斜面上の物体と静止摩擦力

が得られる．式 (2.26)，(2.27)，(2.28) から，

$$\mu = \tan\theta_c \tag{2.29}$$

という関係式が得られる．

物体が斜面を滑るとき，物体はやはり斜面の運動方向とは逆の方向に摩擦力を受ける．これを**動摩擦力**という．動摩擦力も，面からの抗力 N に比例する．

$$f = \mu' N \tag{2.30}$$

比例係数 μ' は**動摩擦係数**という．一般に $\mu' < \mu$ である．

$\mu' > \mu$ だとすると，最大静止摩擦力を超えた力が加わって動き出したとたんに，止まってしまうというおかしなことになる．，よってこの不等号が成り立っていなければならない．

静止摩擦係数，動摩擦係数は接している物体の組み合わせによる．表 2.2 に各種物体間の摩擦係数を示す．

表 2.2　物体 I，物体 II 間の摩擦係数．

物体 I	物体 II	μ	μ'
木	木	0.78	0.42
ガラス	ガラス	0.94	0.40
ゴム	木	0.68	0.48

抵抗力　　気体，液体などを**流体**とよぶ．流体には，**粘性**という性質があり，物体がこの中を運動するとき抵抗力が発生する．物体があまり速く運動してない場合には，抵抗力 F は速さに比例する．

$$F = cv \tag{2.31}$$

c は物体の形状，流体の粘性の度合い (**粘性係数**) によって決まる．

このような抵抗力は，物体の一部が瞬間的に物体に付着することから発生する．流体が付着すると，物体はその反動で動きにくくなるわけである．

コラム　摩擦力と原子間力

どんな物体でも原子でできているので，これらを接触させるということは，物体の表面の原子が接触し，原子と原子の間に働く原子間力によって相互作用するということである．これが摩擦の原因である．物体の表面はきれいに原子が整っているわけではなく，凸凹している．このため，両物体の原子が接触している面積は小さい．物体を押しつけるとこの接触面積 S が大きくなる．この押しつける力が抗力 N と等しいので，

$$S \propto N$$

となる．摩擦力 f_0 は S に比例するので，

$$f_0 \propto N$$

となる．

現代の技術を駆使すれば，原子面がきれいにそろった物質を作製できる．Si（シリコン），Al（アルミニウム）などがその例である．こうした物体を接触させれば，物体は1つの固まりになってしまい，摩擦力は "無限大" となる．

抵抗力を受けている物体の運動については，第4章で述べる．

✐ 圧力の単位　Pa

浮力　静止流体中に単位断面（断面積=1m^2）を考え，この断面に垂直に働く力を**圧力**という．圧力の単位は Pa（パスカル）である．

$$1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2} \tag{2.32}$$

図2.14に示すように，単位断面にかかる圧力 p は，両面から面に垂直にかかっている．もしそうではないとすると，面に沿った成分の方向に流体が動き出してしまう．これははじめに仮定した「静止流体」という条件に反する．

もちろん，考える断面はどのようなものでもよい．深さ h の流体にある小さい断面には，その面がどの方向を向いていても，同じ圧力がかかる．したがって，深さ h の場所に小さい球をおくと，その面にはあらゆる方向から一定の圧力がかかることになる（図2.15）．

さて，深さ h における水平な断面にかかる圧力を考えよう．これは，密度 ρ，深さ h の流体の柱の底にかかる重力に関係する．大気圧を p_0 とあわせて，この断面にかかる圧力 p は

$$p = p_0 + \rho g h \tag{2.33}$$

となる．

ここで図2.16のように，任意の深さに沈んでいる高さ a，断面積 S の物体を考えよう．

$$p = p_0 + \rho g h$$

図 2.14　静止流体中の圧力

図 2.15　深さ h に沈めた小球にかかる圧力

図 2.16　浮力が生じる理由．物体の下の面が上方向にうける力が，上の面が下方向にうける力よりも大きいので，上向きの力が物体に働く．

$$p' = p_0 + \rho g(h + a)$$

であるから，この差は

$$p' - p = \rho g a \tag{2.34}$$

となり，この物体には上向きに

$$F = (p' - p)S = \rho g(aS) \tag{2.35}$$

の力が加わる．これを**浮力**という．aS はこの沈んでいる物体の体積なので，ρaS はこの物体が占める体積に本来入っていた流体の重さである．よって流体中の物体は，物体がしめる体積に本来入っていた流体の重さ分だけ軽くなることがわかる．これが**アルキメデスの原理**である．

アルキメデスの原理を任意の形状の物体に拡張するには，物体を無数の直方体に分割すればよい（図 2.17）．これにより，体積 V の物体に働く浮力 F は

$$F = \rho g V \tag{2.36}$$

となる．

図 2.17　任意の形状の物体に関する浮力を考える場合，物体を小さな直方体に分割すればよい

自然界の力　これまで述べてきた様々な力の他に，自然界には電気的な力，磁気的な力，原子間に働く力，原子核に働く力，素粒子に働く力などがある．

すでに述べたように，摩擦力は原子間に働く力で，これは電気的な力が基本となっている．抵抗力は粘性によるものであるが，粘性ももとを正せば，原子間の力に帰着する．

すなわち，自然界における力は，見かけは様々な形をとるが，せんじつめれば 4 つの基本力がもとになっている．それらは，

1. 重力
2. 電磁気力

3. 弱い力
4. 強い力

である．このうち，重力はもっとも弱いものであるが，天文学的スケールまで到達するので，宇宙の運動・変化・進化において，主役を演じる．他の弱い力，強い力は，重力よりはるかに強いが，遠くまで到達しない．電磁気力は重力と同じように遠くまで到達できるが，その強さゆえにたいていの物体は電気的に中性になってしまう．

強い力は，原子核の内部で中性子どうし，陽子どうし，中性子と陽子を強く結びつけ，きわめて密度の高い状態をつくり出している．しかしこの到達距離は 10^{-15}m 程度である．

弱い力とは，原子が β 崩壊し，電子が原子核から放出される過程を生み出す．

☞ 2008 年にノーベル賞を受賞した小林・益川理論はこの弱い力に関する理論である．

電気力と磁気力は，昔は異なる力と考えられていたが，いまでは**電磁気力**という，統一された力の側面であると考えられるようになった．さらに最近では，弱い力と電磁気力が統一され，**電弱相互作用**というものが考えられている．この電弱相互作用に強い力と重力も統一しようという試みもある．

2.4　大きさのある物体のつり合い

剛体に働く力　　力のつり合いは，大きさのない物体については単純であるが，大きさのある物体では，力のかかる位置関係がきいてくるので，複雑になる．ここでは，力が加わっても，その物体の形状が変化しない場合，すなわち，きわめてかたい**剛体**に力が加わった場合の力のつり合いを考えよう．

剛体に力が加わる場合，

1. 剛体が並進運動する
2. 剛体が回転運動する

という 2 つの場合が考えられる．もちろん，2 つが混じり合った運動も起こる．

このような場合，先に述べたように，剛体の**どこに**，どんな方向（向き）に力がかかるかが重要となる．同じ大きさの力でも，力のかかる位置，方向によっては，物体の回転運動に対する寄与が大きく異なるからである．

力のモーメント　　図 2.18 には，円板を回転させるような場合の，力のかかり方の違いを示してある．経験からいえば，(a) のような力のかかり方が，円板を回転させるのに最も有効である．(b) や (c) でも，円板を回転させることはできる．しかし (d) とか (e) のように，円板の中心（回転軸）を通る力は，円板を回転させることはできない．

(a), (b), (c) を比較すると，回転させやすいのは，力が大きいことだけで

はなく，回転軸とその力の働く点までの距離 r が重要であることがわかる．そこで力の代わりに**力のモーメント**というものを考える．

$$N = Fr \tag{2.37}$$

力のモーメント N が大きければ，円板を回転させるのに有効である．

また図 2.18 の (c) の場合からわかるように，その力までの直線の垂直成分 $F_{\perp}$ だけが回転に寄与する．よって前式は

$$N = F_{\perp} r \tag{2.38}$$

と拡張することができる．

N は時計回りに回転させる方向，反時計回りに回転させる方向のように向きをもったベクトルとして表させる．方向は回転面に垂直な方向で，反時計回りに回転させる方向を正とする．

剛体の力のつり合い　剛体にかかる力がつり合い，剛体が並進運動もせず，回転運動もしないためには，力の合力だけでなく，(任意の回転軸の周

図 2.18　円板を回転させようとする力

図 2.19　剛体の並進運動と回転運動

りの）力のモーメントが 0 になっている必要がある．すなわち，

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots \quad = \boldsymbol{0} \tag{2.39}$$

$$\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{N}_3 + \cdots \quad = \boldsymbol{0} \tag{2.40}$$

等しい大きさで逆向きに働き，物体を回転させようとする力を**偶力**という．この場合，

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \quad = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 \quad \neq \boldsymbol{0}$$

となる．偶力は，物体の回転だけを引き起こす．

重心　剛体にかかる重力は，剛体の各部分にかかる力を合成したものである．これらの重力は，すべて鉛直下向きにかかり，物体は落下する．

剛体をある点で支えると，一般には回転してしまうが，ある点で剛体を支えると回転しない．この点を**重心**とよぶ．剛体を小さな固まりに分割して，それぞれの位置を $\boldsymbol{r}_i$, 質量を m_i とすると，重心の位置 $\boldsymbol{r}_G$ は

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} \tag{2.41}$$

である．

☞ この重心の表式は正確には**質量中心**を表している．重力が一定の場合，重心と質量中心は同じなのでここでは区別しない．

たとえば，密度と太さが一様な棒の重心は，棒の中心にある．円板面が鉛直方向にそった一様な円板の重心は円の中心である（図 2.22）．

重心のまわりの力のモーメントは，

$$\boldsymbol{N}_G = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{N}_3 + \cdots = \boldsymbol{0} \tag{2.42}$$

である．

重心は任意の剛体を糸で結びつり下げたときの糸の方向上に存在する．ある点で物体をつり下げ，次に別の点で物体をつり下げれば，重心はどちらの場合でも糸の方向にあるので，その方向が交わる点として求められる．た

図 2.20　偶力

図 2.21　重心の位置

とえば半円板の重心は，図 2.22 のように，糸をつり下げたときの，糸の方向線 AB と CD の交わる点である．

図 2.22　半円板の重心

演習問題 2

A

1. **力のつり合い**　体重計に 60 kg の人が乗っている．この人が体重計の上を手で静かに 10 [kgW] の力で押した．

(a)　この人に働いている力を述べよ．

(b)　体重計が人から受ける力は何 N か．

(c)　体重計の目盛りはいくつを示すか．

(d)　体重計を手で押したことによる効果を説明せよ．

2. **摩擦力と力のモーメント**　長さ l のはしごをなめらかな壁に立てかけてある．床とはしごの間の静止摩擦係数 μ は 0.5 とする．はしごと床のなす角度が何度のとき，はしごは滑って倒れてしまうか．

3 運動の法則

3.1 速度・加速度

位置ベクトル　物体の位置は原点からの距離だけでは決まらず，方向や向きも指定しなければならない.「大阪は東京から西南西に 600 km に位置する」という具合である．つまり物体の位置はベクトル量である．

図 3.1　東京から見た大阪の位置

2 次元の**位置ベクトル**は，2 つの量で表される．デカルト（直交）座標系では，図に示すように

$$\boldsymbol{r} = (x, y) \tag{3.1}$$

あるいは，**極座標**では，ベクトルの長さ r と方向 θ という 2 個の量を指定すると (図 3.2 参照),

$$\boldsymbol{r} = (r, \theta) \tag{3.2}$$

となる．ここで，r を**動径成分**，θ を**接線成分**という．

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta \tag{3.3}$$

である．

3 次元の場合には，図 3.3 に示すように，極座標表示は 3 つの量 (r, θ, φ) で表される．ここで φ はベクトル $\boldsymbol{r}$ を x-y 平面に投射（射影）したときの，

図 3.2　極座標

x 軸となす角である.（この場合，φ を方位角，θ を極角とよぶ.）図を見てわかるように

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{3.4}$$

である.

図 3.3　3 次元の極座標

変位ベクトル　時刻 t のときの物体の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，時刻 t' $(t' > t)$ のときの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'$ とする.

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} \tag{3.5}$$

を**変位ベクトル**という.

t' と t の間隔がきわめて短く，$\boldsymbol{r'}$ と $\boldsymbol{r}$ がきわめて近いとき，

$$\begin{aligned} \Delta t &= t' - t \\ \Delta \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{3.6}$$

と書く．ここで Δ（デルタ）という記号は,「きわめて小さい量」ということである．

☞ 小文字の δ を「きわめて小さい量」として使う場合も多い．

図 3.4　車の移動を表す変位ベクトル

速度・加速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{3.7}$$

で定義されるようなベクトルを**速度**,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{3.8}$$

で定義されるようなベクトルを**加速度**という．

物体が x 方向のみに運動しているときは，ベクトルを考える必要はない．速度，加速度は

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{3.9}$$

で定義される．この場合，x を t の関数，$x(t)$ と考えれば，速度は曲線 $x = x(t)$ の**勾配**を表す（図 3.5 参照）．

一般に十分小さい Δt を考えるとき，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$, $\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ を**微分**という．

微分　t の関数として $x(t)$ の曲線が描ければ，それから微分をつくる（"微分する"）のは簡単である．つまり定規を使って勾配を求めればよい．代表的な関数の微分を勉強しておこう．

1.

$$x(t) = t^2 \tag{3.10}$$

図 3.5　$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ と勾配 $\tan\theta$.

$x(t+\Delta t) = (t+\Delta t)^2 = t^2 + 2t\,\Delta t + \Delta t^2 \fallingdotseq t^2 + 2t\,\Delta t$ であるから，

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \fallingdotseq \frac{2t\,\Delta t}{\Delta t} = 2t \tag{3.11}$$

となる．

2. 一般に $x(t) = t^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合，$x(t+\Delta t) = (t+\Delta t)^n = t^n + nt^{n-1}\Delta t + \cdots \fallingdotseq t^n + 2t^{n-1}\Delta t$ であるから，

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \fallingdotseq \frac{nt^{n-1}\Delta t}{\Delta t} = nt^{n-1} \tag{3.12}$$

という公式が得られる．逆に

$$x(t+\Delta t) \fallingdotseq x(t) + \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t \tag{3.13}$$

とも書ける．

なお，微分する関数が

$$x(t) = f(t)g(t) \tag{3.14}$$

という積の形になっている場合，

$$x(t+\Delta t) = f(t+\Delta t)g(t+\Delta t) \fallingdotseq \left(f(t) + \frac{\Delta f}{\Delta t}\Delta t\right)\left(g(t) + \frac{\Delta g}{\Delta t}\Delta t\right) \tag{3.15}$$

なので，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t) - f(t)g(t)}{\Delta t} \fallingdotseq \frac{\Delta f}{\Delta t}g(t) + f(t)\frac{\Delta g}{\Delta t} \tag{3.16}$$

という形に書ける．さらに

$$x(t) = f(at) \quad (a \text{ は定数}) \tag{3.17}$$

の場合，$x(t+\Delta t) = f(a(t+\Delta t)) = f(at + a\Delta t) \fallingdotseq f(at) + \dfrac{\Delta f}{a\,\Delta t}a\,\Delta t$ より，$T = at$ として，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = a\frac{\Delta f(T)}{\Delta T} \tag{3.18}$$

となる．より複雑な $x(t) = f(g(t))$ の場合は，$T = g(t)$ とおいて，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta g}{\Delta t}\frac{\Delta f(T)}{\Delta T} \tag{3.19}$$

となる．

$\Delta t, \Delta x, \Delta f$ の無限小の極限を考えたものが微分である．この極限は $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to \dfrac{dx}{dt}$ のように Δ のかわりに d を使って表す．

速度の合成・相対速度　光速に近い速度の場合を除き，通常，速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している電車の中でミニカーを速度 $\boldsymbol{v}'$ で動かせば，ミニカーは地上に対し

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \tag{3.20}$$

で運動していることになる．これを**速度の加法則**という．

図 3.6　電車中のミニカーの運動．

逆に速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している物体を，速度 $\boldsymbol{v}'$ で運動している観測者から見ると，物体の速度は

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \tag{3.21}$$

と観測される．これを**相対速度**という．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$ なら相対速度 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ となり，静止しているように見える．

例題 3.1　川上り，川下り

幅 l の川が，速さ v_0 で流れている．川の流れと垂直方向に進み，真向かいの対岸まで速さ v のボートで渡る．どの方向にかじをとればよいか．また，川を渡りきる時間はいくらか．

解　川の流れの速度を $\boldsymbol{v}_0$，ボートの速度を $\boldsymbol{v}$ とする．ボートの岸に対する速度 $\boldsymbol{V}$ は，図のような合成ベクトルになる．これより，かじと川の流れの角度 θ は

$$\tan\theta = \frac{V}{v_0} = \frac{\sqrt{v^2 - V_0^2}}{v_0}$$

図 3.7 速度ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ で流れる川を，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ で走るボートで渡る．

となる．

☞ θ は

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{v^2 - V_0^2}}{v_0}\right)$$

とも書ける．ここで $\tan^{-1} x$ という関数は「tan をとると x になるような角度」を表す．

速度空間図 位置ベクトルを描いた空間は通常の「空間」である．これを拡張し速度を空間として描くと便利である．速度空間は座標軸として，例えば v_x, v_y をとる（図 3.8 参照）．位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が半径 r の等速円運動を描くとき，その速度 $\boldsymbol{v}$ も半径 v の**等速円運動**となる．

図 3.8 速度空間．

ベクトル $\boldsymbol{r}$ が円運動し，1 回転する間に，速度空間でも $\boldsymbol{v}$ は 1 回転する．すなわち，1 回転の周期は同じである．円周はそれぞれ $2\pi r$, $2\pi v$ であるから，α を速度の変化率，すなわち加速度の大きさとすると，

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi v}{\alpha}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{v^2}{r} \tag{3.22}$$

が得られる．これは等速円運動の**向心加速度**とよばれる．

図 3.9　円運動の速度空間図

3.2　運動の法則

運動の法則　　ニュートンは，物体の運動の加速度が，そこに加わっている力に比例するという，**運動の法則**を発見した．これに加えて，物体に力が加えられなければ，物体の運動状態はそのままの状態を維持すること（**慣性の法則**），2 物体間の**相互作用力**について，作用と反作用はつねに等しく向きが逆であるという**作用・反作用の法則**を，運動を記述する 3 大法則とした．すなわち，

運動の第 1 法則:　慣性の法則

運動の第 2 法則:　質量 m の物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働くとき，その加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ は

$$m\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{F} \tag{3.23}$$

で決定される．

☞ 質量も時間変化するような場合は $\dfrac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}$ と拡張される．これについてはすぐ後に述べる．

運動の第 3 法則:　作用・反作用の法則．物体 1 が物体 2 から受ける力を $\boldsymbol{F_{12}}$，物体 2 が物体 1 から受ける力を $\boldsymbol{F_{21}}$ とすると，

$$\boldsymbol{F_{12}} + \boldsymbol{F_{21}} = \boldsymbol{0} \tag{3.24}$$

慣性の法則とは何か　　テーブルに置かれたボールは，これに力が加わらない限り，いつまでも静止し続ける．直線上の線路を速さ v で走る電車は，摩擦を無視すれば，いつまでも同じ速さで走り続ける．地球は 40 億年以上前に形成されてから，同じような運動を持続している．

☞ 回転運動が続くのは広い意味での慣性の法則である．狭い意味では静止状態，等速直線運動が力を加えない限り続くというのが慣性の法則とよび，回転運動は含めない．

慣性の法則は日常的に成り立っており，ニュートンが取り上げる以前から，多くの自然哲学者（科学者）は，これが基本的運動の形態であることを知っていた．

慣性の法則を考察してみよう．図 3.10 のように，水平テーブルの上に，ボールを静かに乗せて放置する．ボールはもちろん，何日でも動かずにテーブルの上に乗っているはずである．これが慣性の法則である．

そこで，慣性の法則が成り立っておらず，ある日，このボールが何の理

由もなく，突然，ある方向（例えば北）に動いたと仮定してみる．しかしなぜ一体，“ 北”なのか，東西南北は人間が勝手に選んだ方向であり，もし，ボールが北に動いたならば，同時に南にも東にも西にも動いてよいはずである．しかし 1 つの物体が同時に東西南北すべての方向に動くことは道理にかなっていない（非合理性）．このように慣性の法則が成り立っていないとすると，非合理性が生じるのである．

図 3.10　テーブルの上のボール

第 2 法則と運動量・力積　第 2 法則は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{3.25}$$

であるが，これは**運動量**

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{3.26}$$

を用いると，

☞ 質量が大きいものはたとえスピードが小さくても運動量は大きくなる．ゆっくり進んでいるタンカーの方が，その 10 倍の速さで走っているレーシングカーよりも運動量ははるかに大きいのである．

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{3.27}$$

とかける．式 (3.25) と式 (3.27) は質量が一定の場合は同じであるが，質量も時間変化する場合も後者は使えるので，より一般的である．

式 (3.27) をより物理的に解釈するためには，微小時間に書き直すとよい．

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} \times \Delta t \tag{3.28}$$

これは，**力とそれをかけた時間の積により，運動量は変化する**という意味である．この力と力をかけた時間の積を**力積**とよぶ．弱い力でも，こつこつと長時間かければ，大きな運動量の変化をもたらすことができる．

逆に力がかかっていない場合，運動量が一定である．これは慣性の法則である．外部から力がかかっていないとき，運動量が一定になることを**運**

動量の保存則とよぶ．

例題 3.2　雨の中を動いている洗面器

雨の中、洗面器に車輪をつけて速さ v_0 で走らせる．洗面器には 1 秒間に σ だけ，雨水がたまるとする．このとき，洗面器の速さはどのように変わるか．

図 3.11　洗面器に雨が降りそそぐときの洗面器の減速．

解　洗面器と雨水をあわせた質量は

$$m = m_0 + \sigma t$$

である．運動量の保存則から

$$\frac{d(mv)}{dt} = 0$$

なので

$$mv = m_0 v_0$$

となるので、

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \sigma t} \tag{3.29}$$

というように減速することがわかる．

作用・反作用の法則の解釈　慣性の法則と作用・反作用の法則は一見，無関係のように見えるが，そうではない．いま，物体 1 および物体 2 が外から力を受けず相互作用としている場合を考えよう（図 3.12）．

作用・反作用の法則は

$$\boldsymbol{F_{12}} + \boldsymbol{F_{21}} = \boldsymbol{0}$$

であった．そこで，この式が成り立たないとする．

$$\boldsymbol{F_{12}} + \boldsymbol{F_{21}} = \boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}$$

この物体 1 と物体 2 を十分離れた位置から観測してみよう．すると 1，2 はほとんど合体して見える．しかしこの合体物には全体として $\boldsymbol{F}$ という力が加わっていると仮定したから，この合体物は理由もなしに突然$\boldsymbol{F}$の方向に動き出すことになる．これは慣性の法則に反している．

さて，$\boldsymbol{F_{12}} + \boldsymbol{F_{21}} = \boldsymbol{0}$ だけで十分であろうか？確かにこの場合，二つの物体の重心は力を受けないが，力が作用線の方向を向いていないと，２個の物体は重心の周りに回転を始めてしまう（図 3.12）．これは回転軸の方向を特殊扱いしているので，空間の対称性と矛盾してしまう．よって力は作用線上になければならない．このように対称性を使った議論は物理の強力な考え方の一つである．

☞ 現代物理ではある種の対称性が破れることわかっている．たとえば磁石はどの方向を向いてもいいはずなのにある方向を N 極としている．このような現象は自発的対称性の破れとよばれている．こうした概念を背景に展開された理論が，南部理論である。南部理論に対して 2008 年度ノーベル物理学賞が与えられた．

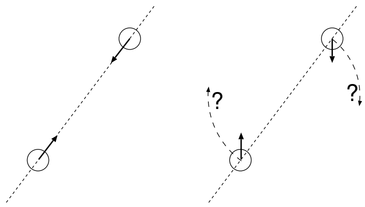

図 3.12　物体 1，2 が相互作用している場合．もし力が作用線上にないと，物体は回転し始めてしまう（右図）．

3.3　等速度・等加速度運動

等速度運動　速度 $\boldsymbol{v}$ で運動し始めた物体は，これに力が加わることがなければ，そのまま $\boldsymbol{v}$ で運動を続ける．すなわち，

$$\boldsymbol{v} = \text{一定} \tag{3.30}$$

である．これを**等速度運動**，あるいは**等速直線運動**という．

これに反して，$\boldsymbol{v}$ の大きさ（つまり速さ，スピード）v は一定であるが，方向がどんどん変化していく運動もある．

$$\begin{cases} v = \text{一定} \\ \boldsymbol{v} \neq \text{一定} \end{cases} \tag{3.31}$$

の場合，これは**等速運動**であるが，等速度運動ではない．

図 3.13(b) に示すような等速円運動は，速さ v は一定であるが，速度の方向は変化している．

$t = 0$ での速度，速さを**初速度**，**初速**といい，$\boldsymbol{v}_0$, v_0 と書くことが多い．t_0 後の物体の位置は，初速度の方向を x 方向として

$$x = v_0 t_0 \tag{3.32}$$

となる．これが等速直線運動の移動距離である．

上の式は x-t の図を描けば，勾配 $\tan\theta = v_0$ の直線となる．一方，v-t 図というものを考えることもできる．v-t 図では，t の値にかかわらず，$v = v_0 =$ 一定 という直線になる．この直線と $t = t_0$ の直線で囲まれた面積は $v_0 t_0$ となるから,「移動距離は v-t 図の面積」ということがわかる．

図 3.13　(a) 等速度運動（等速直線運動）と (b) 等速円運動

図 3.14　(a) 等速直線運動の x-t 図と (b) 等速直線運動の v-t 図

等加速度運動　　加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ について，

$$\boldsymbol{\alpha} = \text{一定} \tag{3.33}$$

であるような運動を**等加速度運動**という．等加速度で方向が変化しない運動を**等加速直線運動**という．

注意しなければならないのは，**負の加速度**（すなわち減速度）というものも，“加速度”という言葉を用いることである．正の加速度，負の加速度とは，それぞれ加速度が進行方向を向いている場合と進行方向と逆を向いている場合を指す．

たとえば，地上で物体から静かに手を離すと，物体は落下する．これを**自由落下**という．重力による自由落下の加速度は，g と記し，

$$\alpha = g = 9.81m/s^2 \tag{3.34}$$

である．この加速度を**重力加速度**という。

☞ g の正確な値は式 (2.2) を参照.

この加速度は，乗り物のような人工的なものの加速度と比べて大きい．オートバイや高性能車の加速度はおよそ $3[m/s^2]$ であり，大型ジェット機

は $2[m/s^2]$ ぐらい意外と小さい．新幹線は加速度を小さくすることで乗り心地をよくしている．その加速度は自転車並み，およそ $0.4[m/s^2]$ である．これらに比べて，スペースシャトルの打ち上げ時の加速度は g の 3 倍にも達する．

図 3.15　加速度比べ

さて等加速直線運動（鉛直下向きの自由落下もこの場合に相当する）では，時間 t の間に，速さ v は αt だけ増加する．したがって，初速を v_0 とすると，

$$v = v_0 + \alpha t \tag{3.35}$$

となることがわかる．この式を図示すると図 3.16 のようになる．

前にやったように面積を計算すると初速を v_0 とすると，

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{3.36}$$

という関数となることが予想できる．確かにこれを微分すると，$\dfrac{d(v_0 t)}{dt} = v_0$，$\dfrac{d(\alpha t^2)}{dt} = 2\alpha t$ なので，

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + \alpha t \tag{3.37}$$

となっている．

これらの式から x と v の関係を求めてみよう．

$$t = \frac{v - v_0}{\alpha}$$

より，$x(t)$ は

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = v_0 \frac{v - v_0}{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{v - v_0}{\alpha} \right)^2$$

となる．整理して

$$2\alpha x = v^2 - v_0^2 \tag{3.38}$$

となる．

たとえば自由落下のとき，$v_0 = 0$，$\alpha = g$，落下距離を h とすると，$2gh = v^2$ なので

$$v = \sqrt{2gh} \tag{3.39}$$

となる．

図 3.16　等加速直線運動の v-t 図

演習問題 3

A

1. **合成関数の微分**

$x(t) = a\sin^2(t)$ を微分せよ．

2. **慣性の例** 1

慣性の法則の例を挙げよ．

3. **慣性の例** 2

物体を図のように糸で天井からつるす．物体の上下で糸は同じものとする．下の糸を引くことで，糸は切れる．物体の上の糸が切れるか，下の糸が切れるか．

図 3.17 天井から糸でつるした物体．物体から垂らした糸を引っ張る．

4. **等加速度運動**

鉛直上方に初速度 v_0 で投げあげた物体が，最高点に達するまで，どれだけの時間がかかるか．またその高度 h はどれほどか．