4　重力下の複雑な運動

4.1　斜面上を滑る運動

斜面上の物体の運動　なめらかな斜面上を落下する物体の運動は，重力の下での鉛直な落下運動とほとんど変わらない．このとき，斜面に沿った下方を x 軸とすると（図 4.1），重力 mg の x 成分は，斜面の傾斜角を θ として，$mg\sin\theta$ であるから，ニュートンの運動方程式 (3.25) によって，

☞ この成分が $\cos\theta$ か，$\sin\theta$ だったか，混乱してしまったときは $\theta \to 0$ にして考えてみる．すると，重力の x 成分は 0 になるので $\sin\theta$ でなければいけないことがわかる．

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg\sin\theta \\ \therefore \alpha = \frac{dv}{dt} &= g\sin\theta \end{aligned} \tag{4.1}$$

よってこのとき，加速度は g でなく $g\sin\theta$ となることがわかる．もちろん斜面の傾斜角 θ が 0 になると，加速度は 0 になる．

上の式を見てわかるように，斜面上の落下では，g の代わりに $g\sin\theta$ とすればよい．あとは等加速直線運動と同じである．

図 4.1　斜面上を滑る運動

摩擦力がある場合　斜面と物体の間に，摩擦力が働く場合（動摩擦係数 μ'）もあわせて考えておこう．ニュートンの第 2 法則によって

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu'(mg\cos\theta) \tag{4.2}$$

なぜならば，重力 mg の斜面に垂直な成分は $mg\cos\theta$ （図 4.1 参照）であり，また斜面に垂直な方向の力のつり合いより，抗力 N は重力の斜面垂直成分と等しい．よって動摩擦力 μN は $\mu' mg\cos\theta$ で与えられる．

したがって，この場合の加速度は

$$\alpha = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta) \tag{4.3}$$

となる．つまり自由落下のときの g の代わりに $g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$ を代入すればよいのである．

たとえば，静止した状態から斜面を滑り出し時間 t が経過した場合の落下距離 x は，

$$x = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 \tag{4.4}$$

となることがすぐにわかる．

滑車の運動　重さのない滑車に質量 m_1 と m_2 のおもりを軽いひもでかけて上下に運動させる（図 4.2）．ひもの途中の任意の点（たとえば B, C）を考える．ここでは，ひもの質量は無視できるので，この点が等速直線運動しても加速度運動をしても，それぞれの点の上側と下側で逆向きの張力，T と $-T$ がかかっていると考えられる．

☞ たとえば点 B のまわりの微小領域を考える．その上側の張力を T_1，下側の張力を T_2 とすると，ニュートンの運動方程式は $m\alpha = T_1 + T_2$ となる．質量が無視できる場合，左辺を 0 とみなし，$T_1 = -T_2$ が得られる．

同様に，おもりと結ばれた点 A, D でも，その上部には $-T$ の張力が働いている．すると左と右のおもりに関して，

$$(\text{左})\ m_1\alpha = m_1 g - T \tag{4.5}$$

$$(\text{右})\ -m_2\alpha = m_2 g - T \tag{4.6}$$

が成り立つ．ただし，鉛直下向きを正ととった．

上の 2 式の引き算をすると，

$$(m_1 + m_2)\alpha = (m_1 - m_2)g \tag{4.7}$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \tag{4.8}$$

となることがわかる．すなわち，この系のおもりの加速度は g の代わりに $\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$ が重力加速度となった自由落下と見なせる．

4.2　放物運動

2 成分の運動　地面に垂直な鉛直面内での物体の運動を調べよう．この場合も，空気抵抗を無視すれば働いている力は重力のみである．

いま，この鉛直面を x-y 面とする．また鉛直方向を y 軸方向とする．運動方程式，

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{g} \tag{4.9}$$

図 4.2　滑車にかかった物体の運動

($\boldsymbol{g} = (0, -g)$ は重力加速度ベクトル) は，x, y 成分についてそれぞれ

$$\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ m\frac{dv_y}{dt} &= -mg \end{aligned} \tag{4.10}$$

と分けて考えることができる．

第 1 の式は，等速直線運動を表し，第 2 の式は等加速直線運動を表す．したがって，重力下での鉛直面内の運動は，この 2 つを同時に，x, y それぞれの方向に対して考えたものとなる．

これらの式から

$$v_x = 一定 \equiv v_{0x} \tag{4.11}$$

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{4.12}$$

となる．ここに $(v_{0x}, v_{0y}) \equiv \boldsymbol{v_0}$ は初速度で，$t = 0$ のときの速度である（図 4.3）．

物体を投げ出す角度（水平面と初速度ベクトルのなす角度）を θ，その速さを v_0 とすると

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \tag{4.13}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta \tag{4.14}$$

である．

$t = 0$ で原点にあった物体の位置は，

$$x = v_{0x}t \tag{4.15}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4.16}$$

である．このようにして，鉛直面内の運動は，鉛直方向と水平方向を完全に分離して取り扱うことができる．

図 4.3　鉛直面内での放物運動

放物運動の形　上の 2 つの式で表される運動は，**放物運動**とよばれる．この運動の軌跡は**放物線**となる．放物線とは 2 次曲線である．それを示すには式 (4.15) で求めた

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

を式 (4.16) に代入して，

$$y = v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0x}^2} \tag{4.17}$$

あるいは，

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta} \tag{4.18}$$

となる．この式は $x = 0$ と

$$x = \frac{2v_0^2\tan\theta\cos^2\theta}{g} = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

で 0 となる．この距離の半分で最高点に達する（図 4.3）．

$y = 0$ となる

$$x = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

は物体をどこまで投げられるかを意味する．その最大到達距離は $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ が最大となる角度であるから，同じ初速でボールをなるべく遠くまで飛ばしたいなら，$\theta = 45^\circ$ で投げればよいことがわかる．このとき最大到達距離は ${v_0}^2/g$ である．

☞ 三角関数の公式を使わずにこう考えてもよい．$\cos\theta$ は θ とともに減少，$\sin\theta$ は増大する．その積は 2 つが等しいとき，つまり $\theta = 45^\circ$ で最大となる．

水平でない地面での落下　地面が水平でなく，ある角度 β だけ「前上がり」に傾いていることがある．このときのボールの落下点について考えてみよう．

図 4.4 に示すように，傾いた地面上の点は $y = x\tan\beta$ を満たす．$\theta = 45^\circ$

として，これを式 (4.17) に代入すると

$$\begin{aligned} x\tan\beta &= x\tan 45^\circ - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2 45^\circ} \\ \therefore x &= 2(\tan 45^\circ - \tan\beta)v_0^2\cos^2 45^\circ/g \qquad (4.19) \\ &= (1-\tan\beta)\frac{v_0^2}{g} \end{aligned}$$

これより，x 方向の「飛距離」は $\tan\beta$ の割合で減少する．

☞ ここでいう飛距離は上から見て測った距離である．斜面に沿って測った距離はこの $1/\cos\beta$ 倍となる．

たとえば $\beta = 10^\circ$ の場合，$\tan 10^\circ \fallingdotseq 0.18$ なので，18%も飛距離が減る．平地では 100 ヤード（約 90 m）飛ばせる人も 82 ヤードしか飛ばせないのである．ピッチングウェッジで 100 ヤード飛ばせる人は，8 番アイアンを使う必要がある．

図 4.4　ゴルフボールの飛距離

4.3　終端速度

空気の抵抗　空気や水の中を運動する物体には，**抵抗**が働く．速さ v が小さい場合，この抵抗 F_v は

$$F_v = Cv \qquad (4.20)$$

と書ける．ここで C は空気の特性（たとえば「粘性」），物体の形によって定まる定数である．これは**粘性抵抗**とよばれる．

☞ もっと速さが大きくなると v^2 に比例する．これは慣性抵抗とよばれる．

空気抵抗がある場合の落下運動を考えてみよう．3.3 節でのべた落下運動は，

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Cv \qquad (4.21)$$

をとる．ここで鉛直下向きを正とした．右辺第 2 項が空気抵抗である．

自由落下運動では，初速度が 0 から出発するので，空気抵抗は小さく $-Cv$ は無視できる．このため

$$(\text{加速度}) = \frac{dv}{dt} = g \qquad (4.22)$$

となり，等加速度運動を行う．つまり $v = gt$ で落下速度が増大する．

質量 m の物体が h だけ落下したと想定すると，3.3 節でのべたように，

$$v = \sqrt{2gh} \tag{4.23}$$

の速度となる．いま，高度 1 万メートルの高さの積乱雲から，ひょう（あられ）が地上に落下したとすると

$$v = \sqrt{2gh} \fallingdotseq 440\,m/s \fallingdotseq 1600km/h \tag{4.24}$$

☞ マッハとは音速を基準に測った速度である．音速は約 340 m/s =約 1200 km/h.

となり音速を超え，マッハ 1.3 という速さとなってしまう．これは新幹線の 5 倍以上，ジェット旅客機の 2 倍ということになる．こんなひょうにあたったらたいへんである．農作物，山や森の植物は全滅，民家の屋根や窓も莫大な被害を受け，多くの死傷者がでてしまう．

もちろんこんな高速のひょうは降らない．それは大気の空気抵抗が有効に働き，速度を減速するからである．重力の影響で落下速度が大きくなると Cv が増え，やがてこれが重力と等しくなる．

$$mg = Cv \tag{4.25}$$

こうなると物体には力が働かず，等速運動となる．そのときの速さは mg/C である．これを**終端速度**とよび，v_∞ と表す．

$$v_\infty = \frac{mg}{C} \tag{4.26}$$

☞ ひょうの場合には先に述べた慣性抵抗を考慮しなければいけない．例題参照.

∞ の意味は，時間が無限大になった場合の速さを意味する．

速度-時間グラフ　これまでにわかったように，空気抵抗がある場合の速度の変化はなかなか複雑である．t が小さいと t と速度 v の関係は $v = gt$ であるが，t が大きいときは $v = v_\infty$ である（図 4.5）．したがって，一般的な $v - t$ 曲線はこれらの極限を図 4.5 のようになめらかに結んだものである．

図 4.5　空気抵抗がある場合の v-t 曲線

そこでこの曲線を表現する式を推測してみる．こころみに

$$v = v_\infty - Ae^{-Bt} \tag{4.27}$$

を考える．t が大きいと，これは確かに $v = v_\infty$ となる．

t が小さいとき，$e^{-Bt} \fallingdotseq 1 - Bt$ となることを使うと

$$v \fallingdotseq v_\infty - A(1 - Bt) = v_\infty - A + ABt \tag{4.28}$$

となる．これが gt に等しくなるためには

$$A = v_\infty\,,\ B = g/v_\infty \tag{4.29}$$

となっていればよい．$v_\infty = mg/C$ を代入すると $B = C/m$ となるので，

$$v = v_\infty(1 - e^{-(C/m)t}) \tag{4.30}$$

を得る．

この v の表式が式 (4.21) を満たしていることを代入して確かめてみよう．

$$\frac{dv}{dt} = 0 - v_\infty \frac{d}{dt} e^{-(C/m)t} \tag{4.31}$$

$$= -v_\infty \left(-\frac{C}{m}\right) e^{-(C/m)t} \tag{4.32}$$

よって式 (4.21) の左辺は

$$mv_\infty \left(\frac{C}{m}\right) e^{-(C/m)t} = mge^{-(C/m)t}$$

ここで終端速度の表式，$v_\infty = mg/C$ (式 (4.26)) を用いた．

一方，式 (4.21) の右辺は，式 (4.30) を代入し

$$mg - Cv_\infty(1 - e^{-(C/m)t}) = mg - Cv_\infty + Cv_\infty e^{-(C/m)t} = 0 + mge^{-(C/m)t}$$

である．よって式 (4.30) は解となっている．初期条件を決めれば解は 1 つしかない．よって式 (4.30) が唯一の解である．物理ではこのように物理的な直感から解の形を仮定して，実際に運動方程式を満たしていることを示すことが，強力な方法となる．

例題 4.1　空気抵抗がある場合のボールの運動

初速度 v_0 で上方に投げられた質量 m のボールが最高点に達して，落下し始めた．

1. 終端速度はどうなるか．
2. 空気抵抗があるときとないときで，最高点の高さに達する時間はどう違うか．

ただし空気抵抗は速度 v のボールに対して $F_v = -Cv$ とする．

解

終端速度 v_∞ は $mg + F_v = mg - Cv = 0$ となる速度なので，$v_\infty = mg/C$ のままである．

この場合の速度を式 (4.30) を参考に

$$v(t) = A - Be^{-\frac{C}{m}t} \tag{4.33}$$

と仮定してみる．この表式が運動方程式，

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Cv$$

を満たすには，$BCe^{-\frac{C}{m}t} = mg - C(A - Be^{-\frac{C}{m}t})$，つまり $A = mg/C$ である必要がある．

$$v(t) = \frac{mg}{C} - Be^{-\frac{C}{m}t} = v_\infty - Be^{-\frac{C}{m}t} \tag{4.34}$$

また $t = 0$ で $v(t) = -v_0$（鉛直下向きを正としていることに注意）より，$-v_0 = mg/C - B$，つまり $B = mg/C + v_0 = v_\infty + v_0$ となっていなければならない．よって

$$v(t) = v_\infty - (v_\infty + v_0)e^{-\frac{C}{m}t} = (v_\infty + v_0)(1 - e^{-\frac{C}{m}t}) - v_0 \tag{4.35}$$

を得る．最高点では $v = 0$ となっているので

$$\begin{aligned} 0 &= v_\infty - (v_\infty + v_0)e^{-\frac{C}{m}t} \\ \therefore\ e^{-\frac{C}{m}t} &= \frac{v_\infty}{v_\infty + v_0} \end{aligned} \tag{4.36}$$

よって最高点に達する時間は

$$\begin{aligned} -\frac{C}{m}t &= \log\frac{v_\infty}{v_\infty + v_0} \\ \therefore\ t &= \frac{m}{C}\log\frac{v_\infty + v_0}{v_\infty} \end{aligned} \tag{4.37}$$

さて，$v_\infty \gg v_0$ の場合，$\log\dfrac{v_\infty + v_0}{v_\infty} = \log(1 + v_0/v_\infty) \fallingdotseq v_0/v_\infty - \dfrac{1}{2}(v_0/v_\infty)^2$ である．これを代入して

☞ $|x| \ll 1$ の場合，$\log(1+x) \fallingdotseq x - x^2/2$

$$t \fallingdotseq \frac{m}{C}\frac{v_0}{v_\infty}\left(1 - \frac{v_0}{2v_\infty}\right) = \frac{v_0}{g}\left(1 - \frac{v_0}{2v_\infty}\right) \tag{4.38}$$

空気抵抗がない場合は $t = v_0/g$ であるから，空気抵抗があるときは最高点に早めに達する．

4.4　振り子の運動

振り子　重力の下での複雑な運動の代表は，**振り子**の運動である．振り子は，細いひも（糸）の先におもりをつけ，ひもの反対側を固定し，左右に振らせるものである．ブランコなどはこの代表的なものである（図 4.7）．もっとも最近のブランコはひもで結ばれたものは少なく，金属製の丈夫な棒（金具）で結ばれたものである．金具は変形せず**剛体**とよばれ，このような振り子は**剛体振り子**とよばれる．

ラジアン　振り子の運動は平衡点（力がつり合っている点）からどれだけの角度ずれているかで決まってくる．角度は通常 “度”, ° で表すが，それよりも角度を**その角度に対応する円弧の長さ**で定義した方が便利である．た

弧の長さを
ものなので，

だし，ある角度に対する円弧の長さといっても，半径が違う円では長さは異なってくる．よって**ある角度に対する単位円上の円弧の長さ**を角度の単位として採用する．これを**ラジアン**とよぶ．円周 1 周に対する角度 $(360°)$ をラジアンではかると 2π, $90°$ は $\pi/2$ である．通常の角度とラジアンではかった角度では，

$$\text{ラジアンではかった角度} = \frac{\pi}{180} \times \text{通常の角度} \tag{4.39}$$

ラジアンではかった θ が 1 よりもはるかに小さいと，図 4.6 の円弧の長さと直角三角形の高さは近似的に等しい．よって

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta\,,\ |\theta| \ll 1 \tag{4.40}$$

$(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2$ なので

$$\cos\theta \fallingdotseq \sqrt{1-\theta^2} \fallingdotseq 1 - \frac{\theta^2}{2}\,,\ |\theta| \ll 1 \tag{4.41}$$

が導かれる．

☞ 2 項展開より，$|x| \ll 1$ の場合，$(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)x^2}{2} + \cdots \fallingdotseq 1 + nx$ という近似式が成り立つ．この場合，n は正の整数だがこれを実数に拡張し，近似式，
$(1+x)^k \fallingdotseq 1+kx$, ただし $|x| \ll 1$ かつ $|kx| \ll 1$ が成立する．

図 4.6　ラジアンとは単位円の円弧の長さを単位に角度を表したもの．

振り子の運動　振り子は平衡位置（重力下では最下点の位置）から，ある角度 θ だけずれると，重力 mg の成分，$-mg\sin\theta$ の**復元力**（元の平衡位置にもどそうとする力，マイナス符号に注意）が働く．

$$\text{復元力} = -mg\sin\theta \tag{4.42}$$

おもりの平衡位置から円弧にそってはかった距離 x は，ひもの長さを ℓ として，

$$x = \ell\theta \tag{4.43}$$

である．運動方程式は x について

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{4.44}$$

θ に関しては

$$\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \tag{4.45}$$

となる．

図 4.7　振り子の代表的なもの

図 4.8　振り子の運動の復元力

方程式の解　　この方程式を解き，θ と t，あるいは**角速度**$\omega\left(=\dfrac{d\theta}{dt}\right)$ と t の関係を求めるのは簡単ではない．いま，上の式の両辺に ω を掛けてみよう．ω に関しては

$$\omega\ell\frac{d\omega}{dt} = -g\sin\theta \times \frac{d\theta}{dt} \tag{4.46}$$

ここで $\omega^2/2$ を時間で微分したものが

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\omega^2\right) = \omega\frac{d\omega}{dt} \tag{4.47}$$

であるから，式 (4.46) は

$$\frac{\ell}{2}\frac{d}{dt}\omega^2 = -g\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \tag{4.48}$$

となることがわかる．あるいは右辺を左辺に移項し，$\omega^2 = X$ とおくと

$$\frac{\ell}{2}dX + g\sin\theta d\theta = 0 \tag{4.49}$$

ここで積分記号 $\int$ を入れると

$$\frac{\ell}{2}\int dX + g\int \sin\theta d\theta = 0 \tag{4.50}$$

となる．よって

$$\frac{\ell}{2}X - g\cos\theta = \frac{\ell}{2}\omega^2 - g\cos\theta = K(\text{定数}) \tag{4.51}$$

となる．(実際にこれを t で微分してみると式 (4.46) となることが確かめられる.）よって

$$\omega = \pm\sqrt{K' + \frac{2g}{\ell}\cos\theta} \tag{4.52}$$

が得られる．$K' = 2K/\ell$ である．

$\omega = d\theta/dt$ であるから上の式は

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \pm\sqrt{K' + \frac{2g}{\ell}\cos\theta} \\ \therefore \frac{d\theta}{\pm\sqrt{K' + \frac{2g}{\ell}\cos\theta}} &= dt \end{aligned} \tag{4.53}$$

両辺に積分記号を入れて

$$\begin{aligned} \int \frac{d\theta}{\pm\sqrt{K' + \frac{2g}{\ell}\cos\theta}} &= \int dt + L(\text{定数}) \\ t + L &= \pm\int \frac{d\theta}{\sqrt{K' + \frac{2g}{\ell}\cos\theta}} \\ \therefore t &= \pm\int \frac{d\theta}{\sqrt{K' + \frac{2g}{\ell}\cos\theta}} - L \end{aligned} \tag{4.54}$$

これが，求めようとした θ と t の関係である．しかし上の式の積分は難しく，コンピュータを使って数値計算をするか，積分公式集を用いることになる．

☞ たとえば岩波公式 I（森口繁一他著，岩波書店），数学大公式集（Gradshteyn 他著，丸善）

一方，θ が十分小さい「微小振動」の場合，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似でき，振り子の振動の式 (4.45) は

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \tag{4.55}$$

となる．これは 5 章で述べる**単振動**であり，簡単に解ける．

複振り子　図 4.9 に示すように，「振り子に振り子をつけた」ものを**複振り子**という．簡単のために，ひもの長さは同じ ℓ，おもりの質量も同じ m としよう．

図 4.9　複振り子

　複振り子の運動はきわめて複雑なように見えるが，おもりの角度，θ_1，θ_2 が小さいときには，きわめてわかりやすい 2 種類のパターンからなっていることがわかる．そのパターンとは図 4.10(a), (b) に示すようなもので，おもりが同時に左右に動く場合と，おもりが互い違いに左右に動く場合である．これを**基本振動**という．より詳しい基本振動の説明は次章で行うが，要は複雑な振動も簡単な基本振動の重ね合わせでかけるということである．

☞ **基準振動**ともよばれる．

図 4.10　複振り子の基本振動

演習問題 4

A

1. **斜面上の 2 個のブロック**　図のように傾斜角 θ_1, θ_2 の斜面上に，滑車にかけられたひもで結ばれた質量 m_1, m_2 のブロックが，滑り運動をする．ひもの質量，ブロックと斜面との摩擦， 滑車とひもの摩擦を無視する．ひもは伸び縮みしないとして，ブロックの加速度を求めよ．また，加速度が 0 となるのはどのような場合か．

2. **斜面での飛距離**　角度 α で傾いた斜面において，ボールを初速 v_0，水平面からの角度 θ で投げ出す．$\theta > \alpha$ である．
   (a)　地面とぶつかる座標を求めよ．
   (b)　いろいろな θ で打ち出した．斜面上で一番遠いところに行くときの角度 θ を求めよ．

3. **慣性抵抗**　空気抵抗が速さの 2 乗に比例する慣性抵抗を考える．具体的にこの値が $\dfrac{\pi}{4}\rho_{空気}a^2v^2$ とする．$\rho_{空気}$ は空気の密度，a はひょうの半径である．あられは球形とする．
   (a)　落下の運動方程式をたてよ．

(b)　終端速度を求めよ．

(c)　$a = 1\,cm$ として終端速度を計算せよ．

4. **抵抗中で進む距離**　速さ v，質量 M の物体が水中を水平方向正の方向に進んでいる．このとき，水の抵抗は速さ v に比例している．v は時間の関数となる．運動方程式は，

$$M\frac{dv(t)}{dt} = -av\ ,\ a > 0$$

となる．

(a)　$t = 0$ で速さが v_0 であった．その後の $v(t)$ を求めよ．ただし，$v_0 > 0$ である．

(b)　$v(t)$ を t の関数として図示せよ．

(c)　この物体は徐々に減速し，十分時間が経つと静止する．$t = 0$ で速さが v_0 だった物体が静止するまでに進む距離を求めよ．

実際にはこの粘性抵抗の他に，速さの 2 乗に比例する慣性抵抗も存在するので，運動方程式は

$$M\frac{dv(t)}{dt} = -av - bv^2\ ,\ a > 0\,,\,b > 0$$

となる．

(d)　$\dfrac{d}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\dfrac{d}{dx} = v\dfrac{d}{dx}$ となることを用いると，運動方程式は

$$M\frac{dv}{dx} = -(a + bv)$$

となる．これより，v と x の関係を求めよ．

(e)　$t = 0$ で速さが v_0 だった物体が静止するまでに進む距離を求めよ．

5 振動

5.1 バネの振動

バネの復元力　バネを少し伸ばすと，バネは元の状態に戻ろうとする．これをバネの**復元力**という (図 5.1)．これはバネの形状とその素材による．

どのようなかたい固体でも，力 (**応力**) が働くと，それに比例した変形（**ひずみ**）が発生する．

通常の固体では，このひずみの大きさと応力の大きさは比例関係にある．これを**フックの法則**という．バネを伸ばすとそののびの大きさに比例した復元力が働くのは，このフックの法則のためである．

この復元力を式で表せば，x をのびの大きさ（**変位**）として

$$F = -kx \tag{5.1}$$

となる．ここに k は比例定数であり，**バネ定数**とよばれる．

図 5.1　バネの復元力

さて，バネを図 5.2 のように，1 端を固定し，他端に質量 m の物体を結んで，ある長さだけ伸ばして，そこで手を離すと，バネは復元力のため，伸びが小さくなる．やがて，バネの自然の長さ x_0(**自然長**) になると，伸びは x は 0 になり，復元力は 0 となる．

しかし，この時点で質量 m の物体は，ある速度で運動しているから，そ

の慣性によって，さらに運動を続け，バネは縮み始める ($x < 0$)．こうなると逆の復元力（縮んだバネを伸ばそうとする力）が働き始める．そしてついに物体は停止する．このとき，縮みの大きさは最大であるので復元力も最大となっている．その後，バネは伸び始める．やがて自然長になって復元力は 0 になるが慣性によってそのまま伸び続け ⋯．このようにして物体は周期的な運動，すなわち**振動**をする．(図 5.2 参照.)

図 5.2 バネの振動．復元力と物体の速度．

詳しく調べてみると，バネの伸び x(したがって復元力) は cos 関数（余弦関数）の形となることがわかる．逆に速度は sin 関数（正弦関数）となる．

単振動と円運動 sin 関数，cos 関数で振動する現象は，特に**単振動**，あるいは**調和振動**とよばれる．この解は

$$x = A\sin(\omega t + \theta) \tag{5.2}$$

と書くことができる．A は**振幅**，ω は**角振動数**とよばれる．**振動数**を ν と書くと，

$$\omega = 2\pi\nu \tag{5.3}$$

である．

振動の**周期**を T と書くと，$t = T$ で関数は元に戻るので，

$$\omega T = 2\pi \tag{5.4}$$

である（図 5.3 参照）．上式より，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \tag{5.5}$$

という関係が導かれる．

ところで $x = A\sin(\omega t + \theta)$ は半径 A の等速円運動の x 成分を表していることに注意しよう（図 5.4）．速さ v の円運動で

$$v = \frac{2\pi A}{T} \tag{5.6}$$

図 5.3　単振動の振幅と周期.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5.7}$$

である．単振動の角速度は対応する円運動の角速度であることがわかる．

一方，単振動の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{5.8}$$

に $x = A\sin(\omega t + \theta)$ を代入すると，

$$-m\omega^2 A\sin(\omega t + \theta) = -kA\sin(\omega t + \theta) \tag{5.9}$$

なので，

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.10}$$

とすれば，確かにこの関数は運動方程式を満たしていることがわかる．

図 5.4　円運動と単振動.

例題 5.1　振り子の周期

振り子の振れ角 θ の運動方程式は式 (4.55)

$$\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$$

で与えられる，糸の長さが ℓ の微小振動している振り子の周期を求めよ．

解　(5.8) と対応させると，m が ℓ，k が g，x が θ となる．よって，(5.10) より，

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\ ,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{5.11}$$

を得る．

連成振動　3 個のバネを用いて，2 個の物体を連結した場合の複雑な運動を**連成振動**という（図 5.5）．簡単のために，バネの定数はすべて同じで物体の質量も等しいとしよう．いま，左の物体が x_1 だけ右に伸び，右の物体も x_2 だけ右に伸びたとしよう．この場合，バネ 1 は伸び，バネ 3 は縮む．一方，真ん中のバネ 2 は，左から x_1 だけ縮み，右へ x_2 だけ伸びる．よって $x_2 - x_1$ だけ伸びることになる．

図 5.5　連成振動．

このようにして，物体 1，2 にかかる復元力は，

$$\text{物体 1 についての復元力：}\quad -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$\text{物体 2 についての復元力：}\quad -kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

となる．よって運動方程式は

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \tag{5.12}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k(x_2 - x_1) \tag{5.13}$$

これらの式を足し合わせると,

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = -k(x_1 + x_2) \tag{5.14}$$

となる．すなわち**重心**

$$x_G = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{5.15}$$

が，単振動の方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_G = -kx_G \tag{5.16}$$

を満たすことがわかる．このとき角振動数は

$$\omega_G = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.17}$$

であり，バネが 1 つのときと同じとなる．これは $x_1 = x_2$ のとき，真ん中のバネ 2 は伸びも縮みもしていないので，質量が $2m$，バネ定数が $2k$ の運動になっていることに対応している（図 5.6）.

図 5.6　$x_1 = x_2$ の振動.

一方， 式 (5.12) と 式 (5.13) の差を作ると,

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) = -k(x_2 - x_1) - 2k(x_2 - x_1) = -3k(x_2 - x_1)$$

したがって，2 つの座標の差，**相対座標**

$$X = x_2 - x_1 \tag{5.18}$$

という座標は単振動の方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}X = -3kX \tag{5.19}$$

を満たすことがわかる．このときの角振動数は

$$\omega_R = \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{5.20}$$

である．相対座標とは物体 1 からみた物体 2 の位置を表す.

結局,

$$x_G = \frac{x_2 + x_1}{2} = A_1 \sin(\omega_G t + \theta_1)$$

$$X = x_2 - x_1 = A_2 \sin(\omega_R t + \theta_2)$$

となるので,

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_G t + \theta_1) - \frac{A_2}{2} \sin(\omega_R t + \theta_2) \tag{5.21}$$

$$x_2 = A_1 \sin(\omega_G t + \theta_1) + \frac{A_2}{2} \sin(\omega_R t + \theta_2) \tag{5.22}$$

と表される．バネが 3 個，物体が 2 個の一見複雑に見える運動も，実は簡単な単振動の和で書けていることが興味深い．

バネによる鉛直方向の振動　バネ定数 k のバネの下端に質量 m のおもりをつけ，他端を固定して，鉛直方向に静かにつるす（図 5.7）．バネの質量を無視すると，バネの自然の長さ x_0 からの重力による伸び y_0 は，復元力 $-ky_0$ と重力 mg のつり合いから,

$$-ky_0 + mg = 0$$

$$\therefore y_0 = \frac{mg}{k} \tag{5.23}$$

によって与えられる．ここで鉛直方向下向きを正とした．

図 5.7　鉛直方向のバネの振動

このつり合いの位置（バネの長さ $x_0 + y_0$）から，バネが x だけ伸びたとしよう．このとき，復元力は $-k(y_0 + x)$ となる．したがって，おもりに加わる力は，重力を加えて

$$-k(y_0 + x) + mg$$

となる．したがって，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(y_0 + x) + mg = -kx \tag{5.24}$$

となる．ここで $y_0 = \dfrac{mg}{k}$（式（5.23））を用いた．これは単振動の式で，その角振動数は重力がない場合と一致する．

5.2　減衰振動と強制振動

減衰振動　液体中のバネのように，速度に比例した抵抗力が働く場合には，バネの振動の振幅は次第に小さくなり，やがて停止してしまう．大気の空気抵抗の場合（4.3 参照）と同じように，抵抗力は速度 v に比例するとすると，

$$F_v = -Cv \tag{5.25}$$

と書ける．

このとき，振動の振幅 A は長い時間が経つと 0 になってしまうと想像される（図 5.8）．このことをふまえて，振動の振幅が

$$A(t) = A_0 e^{-\kappa t} \tag{5.26}$$

となっているとしよう．κ は正の定数とする．

図 5.8　減衰振動における振幅の変化

抵抗が小さい場合，この振動は単振動になっているので，バネについたおもりの位置（変位）は

$$x = A_0 e^{-\kappa t} \sin \omega' t \tag{5.27}$$

と書けるとしよう．ω' は空気抵抗がないときの単振動の角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ とは必ずしも一致しないとする．

☞ 一般的には sin 関数の引数は $\omega' t$ でなく $\omega' t + \theta$ であるが，時間の原点をずらして簡単化している．

減衰振動の方程式　さて，減衰振動の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - Cv = -kx - C\frac{dx}{dt} \tag{5.28}$$

である．

そこで仮定した解，式 (5.27) を代入してみよう．

$$\frac{dx}{dt} = A_0(-\kappa e^{-\kappa t}\sin\omega' t + \omega' e^{-\kappa t}\cos\omega' t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A_0(\kappa^2 e^{-\kappa t}\sin\omega' t - 2\kappa\omega' e^{-\kappa t}\cos\omega' t - {\omega'}^2 e^{-\kappa t}\sin\omega' t)$$

これらの式を運動方程式（5.28）に代入して両辺を比較する．

$$\begin{aligned} &mA_0((\kappa^2 - {\omega'}^2)\sin\omega' t - 2\kappa\omega'\cos\omega' t)e^{-\kappa t} \\ &= -kA_0 e^{-\kappa t}\sin\omega' t - CA_0 e^{-\kappa t}(-\kappa e^{-\kappa t}\sin\omega' t + \omega' e^{-\kappa t}\cos\omega' t) \end{aligned}$$

ここで $\sin\omega' t$ と $\cos\omega' t$ の項を両辺で等しいと置くと，

$$\sin\omega' t \text{ の項} \quad : \quad m(\kappa^2 - {\omega'}^2) = -k + C\kappa \tag{5.29}$$

$$\cos\omega' t \text{ の項} \quad : \quad -2m\kappa\omega' = -C\omega' \tag{5.30}$$

式 (5.30) より

$$\kappa = \frac{C}{2m} \tag{5.31}$$

となる．これを式 (5.29) に代入すると

$$\begin{aligned} {\omega'}^2 &= \kappa^2 + \frac{k}{m} - \frac{C\kappa}{m} \\ &= \frac{C^2}{4m^2} + \frac{k}{m} - \frac{C^2}{2m^2} \\ &= \frac{k}{m} - \frac{C^2}{4m^2} \\ \therefore \omega' &= \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{C^2}{4m^2}} \end{aligned} \tag{5.32}$$

となることがわかる．$C = 0$ のときは，もちろん $\omega' = \omega = \sqrt{k/m}$ と一致する．抵抗がある場合，角振動数は小さくなり，振動の周期は**長く**なることがわかる．自動車のサスペンションのバネは振動を数回で抑えるような減衰振動となっている．

過減衰　抵抗力が大きくなると周期はどんどん長くなり，もはや振動の体をなさない，すなわち減衰だけ起こり，振動はしない．この様子を図 5.9 に示す．このような現象を**過減衰**という．

ドアが自動的に閉まるように強い抵抗力のバネを用いる．抵抗力がない単なるバネでは閉まる瞬間に速度が最大となってしまい，大きな音で閉まってしまう．これを緩やかに閉まるように抵抗を意図的につけたバネを利用する．

強制振動　バネ定数 k のバネに質量 m の物体をつけ，単振動させると，その角振動数はいつも

$$\omega = \omega_{バネ} = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.33}$$

図 5.9　過減衰するドア

である．これと同じように長さ ℓ のひもの一端に質量 m のおもりをつけ，振り子として小さく振動させると，その角振動数は

$$\omega = \omega_{振り子} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{5.34}$$

である．これらの振動数は振幅や初速度にはよらない．これを**固有振動数**とよぶ．

ブランコをその固有振動数 $\omega_{振り子}$ に合わせて周期的に押してやると，やがてブランコは大きくふれてくる．これに反して，固有振動数と大きく異なる振動数をもった周期的な力を加えたのでは，ブランコはこげない．

図 5.10　ブランコを周期的に押す．

そこで一般的な考察として，バネ定数 k のバネに，角振動数 ω の正弦関数的な外力を加えることを考えてみよう．運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + a\sin\omega t \tag{5.35}$$

とする．a が外力の振幅である．両辺を質量 m で割ると，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_{バネ}^2 x + A\sin\omega t \tag{5.36}$$

となる．$A = a/m$ である．

外力 $a \sin \omega t$ が加わるので，このバネは固有振動数ではなく，外力の角振動数 ω で振動することになる．これを**強制振動**という．上の方程式の解を

$$x = B \sin \omega t \tag{5.37}$$

と置こう．これを式 (5.36) に代入すると，

☞ この解の他に角振動数 $\omega_{バネ}$ の単振動の解を加えたものが一般的な解である．後者は摩擦や空気抵抗などで減衰してしまうので無視している．

$$-B\omega^2 \sin \omega t = -\omega_{バネ}^2 B \sin \omega t + A \sin \omega t \tag{5.38}$$

となり確かに

$$B = \frac{A}{\omega_{バネ}^2 - \omega^2} \tag{5.39}$$

となることがわかる．すなわち，強制振動の解の形は

$$x = \frac{A}{\omega_{バネ}^2 - \omega^2} \sin \omega t \tag{5.40}$$

である．

これによって，外力の角振動数 ω がその固有角振動数に近くなると，振幅が著しく増大することがわかる．これがブランコの振れ幅が大きくなることに対応する．このような現象を**共振**という．

☞ ω が固有振動数よりも大きくなると，振幅の符号が正から負に変わることに注意しよう．実際に振り子を振ってみると，手と逆に振り子が動くことがわかる．

共振現象　　共振の現象は，自然界の様々な場合に現れるし，また，これを応用して生活に役立つ技術が多方面で開発されており，逆に共振を考慮しないと大変なことが起こりうる．両方の例を以下に挙げる．

1940 年，作られたばかりのアメリカ・ワシントン州のタコマ橋という吊り橋が吹きつける風によって完全に倒壊してしまった話は有名である（図 5.11）．風が強く吹くと，風の当たらない側に空気の渦が形成される．この渦は静止しているのではなく，形成されては橋から離れていく．この渦の運動の周期と橋の固有振動数が一致してしまったため，共振現象が発生し，ゆれの振幅が巨大になり，橋は崩壊してしまった．

図 5.11　タコマ橋の崩壊

建物の揺れの固有振動数と地震波の振動数が一致してしまうと，共振現象が起こって，建物は倒壊する．これを避けるため，建物の固有振動数が地震波のそれと一致しないように建物を設計する必要がある．

図 5.12 地震のときの揺れ

テレビ，ラジオのチャンネルを合わせるのも共振の一種である．つまみを回して（最近はリモコンのスイッチを押すだけであるが），ある局に周波数を合わせるというのは，つまみをいじることで，テレビ，ラジオの中の回路の固有振動数を変えて，観たい・聞きたい放送の電波と同じにし，この共振を使って電波を増幅するのである．

原子の中で電子は回転運動していると考えよう．これは横方向から見ると単振動しているように見える．この単振動の振動数は任意の値をとることはできず，とびとびの値しかとれない．それを $f_n\,(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とおく．ある振動数 f_i から別の振動数 f_j の状態へと電子が移るとき，$f = f_i - f_j$ という振動数をもった光が原子から放出される．この振動数 f の光を外部から照射すると，光は共振により増幅され，非常に強い光が原子から放出される．これがレーザーの原理である．

☞ 量子化されているという．

☞ $f_i > f_j$ としている．

図 5.13 原子の中の電子は振動していて，外部からの電磁波と共振する．

音の場合は，共振というよりもむしろ**共鳴**現象とよばれる．様々な場合に共鳴を聞くことができる．コップを耳に当ててみよう．するとザーという音が聞こえる．コップには音源がないのになぜこのような音が聞こえるのか?

コップの中の空気はもともとある角振動数の固有振動数で振動する性質がある．この空気は外部からの刺激がなければ振動はしない．しかし，われわれの身の回りはごく弱い雑音が絶えず存在する．こうした雑音は様々な周波数をもっているが，ちょうどコップの中の空気と同じ周波数の雑音が，空気と共鳴し，この音のみが耳に聞き取れる音となる．これがザーという音の原因である．

図 5.14　コップを耳に当てて音を聞く．

演習問題 5

A

1. <u>単振動の解</u>

   x 軸上を運動する質量 m の質点に復元力 $-kx$ が働いている．運動方程式を解くことにより，時刻 t での質点の位置 x を求めよ．ただし，質点は時刻 $t=0$ で位置 $x=0$，速度 $v=\dfrac{dx}{dt}=v_0$ の状態にあったとする．

   また，時刻 $t=0$ で位置 $x=a$，速度 $v=\dfrac{dx}{dt}=0$ の状態にあったとしたとき，$x(t)$ を求めよ。

2. **<u>斜面上のバネの振動</u>**

   傾斜角 α の摩擦のない斜面で，バネ定数 k のバネの先端の質量 m の物体を単振動させる．このときのバネの振動を考えよう．

   (a)　バネの振動の中心位置はどこか．

   (b)　振動の周期はどうなるか．

3. **<u>振動の山の減衰率</u>**

   減衰振動（式 (5.27)）

   $$x=Ae^{-\kappa t}\sin\omega' t\ ,\ \kappa=\frac{C}{2m}\ ,\ \omega'=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{C^2}{4m^2}}$$

   において，第 1 の山と第 2 の山のピーク値の比を求めよ．第 2 の山と第 3 の山ではどうなるか．

4. **<u>単振動の初期条件</u>**

   単振動の解は式 (5.2) より $x(t)=A\cos(\omega t+\theta)$ で与えられる．

   (a)　$t=0$ で，$x=a, v=\dfrac{dx}{dt}=0$ のとき，A,θ を求めよ．

   (b)　$t=0$ で，$x=0, v=\dfrac{dx}{dt}=v_0$ のとき，A,θ を求めよ．

6 エネルギー，仕事

6.1 仕事，仕事率

仕事をした 「仕事」という言葉は，日常生活でもよく使われる.「仕事がつらい」といえば，肉体的，精神的な疲れを指す.「この作家はいい仕事をしましたね」と言えば，むしろそれは芸術的価値，商業的価値を意味している.

これに反して，ランナーが坂道を登り切った後や，登山家が山の山頂に達したとき,「ああ，やっと仕事をやり終えた」とか,「仕事で疲れた」とはいわない．しかしこのときの「仕事」が，実は物理学の「仕事」という用語に一番近い．日常的な「仕事」は，実は「お仕事」のことで，労働・業務を漠然と指している．したがって，スポーツでいくら汗を流しても，これを「仕事をした」とはいわない.

図 6.1 いい仕事をしてますね.

物理学では，**仕事**を厳密に定義している．この仕事は力が主役となる．力が存在しないとき，仕事は定義されない．この点は，エネルギーの定義と対照的である．これについては後で詳しく述べる.

力 F のもと，物体が距離 x だけ移動したとき，

$$W = Fx \tag{6.1}$$

を**力が物体にした仕事**と定義する．逆に物体は力によって仕事をされたことになる．重力 mg のもと，物体が h だけ落下すると「重力がした仕事」は

$$W = mgh \tag{6.2}$$

となる．

物体が力と同じ方向に移動するとは限らない．たとえば傾斜角 α の斜面上を，斜面に沿って物体が x だけ落下したとしよう（図 6.2）．このとき，仕事は「力と力の方向に移動した距離」と定義される．

$$W = mgh = mgx\sin\alpha = mgx\cos\theta \tag{6.3}$$

ここで θ は力（この場合重力）と物体の移動方向の角度で，$\theta = \pi/2 - \alpha$ である．

図 6.2　物体が斜面上を移動した場合の仕事

たとえば $\alpha = 0$ に近いときは，物体がいくら移動しても，力は仕事をほとんどしない．マラソンランナーが，ゆるい下り坂をいくら走っても，重力はほとんど仕事をしないわけである．

上のことをより一般化しよう．力は一般にベクトルである．この力 $\boldsymbol{F}$ と，移動する変位 $\boldsymbol{r}$ とのなす角度を θ とすると，力 $\boldsymbol{F}$ のした仕事は

$$W = Fr\cos\theta \tag{6.4}$$

となる．F , r はそれぞれ $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{r}$ の大きさである．図 6.3 に示すように，$r\cos\theta$ は変位ベクトル $\boldsymbol{r}$ の力の方向の成分である．

ベクトルの内積　仕事 $W = Fr\cos\theta$ を**ベクトルの内積**（**スカラー積**ともいう）というもので表すことができる．ベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B}$ のなす角度を θ とすると，ベクトルの内積というものを ·（ドット）で表し，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta \tag{6.5}$$

図 6.3　$W = Fr\cos\theta$ という定義．

で定義する．A, B はそれぞれベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の大きさである．$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ なら $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ なので，

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = A^2 \tag{6.6}$$

である．

内積を考える上で，x 軸，y 軸に沿った大きさ 1 のベクトル（**単位ベクトル**）, $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ を考えるとよい（図 6.4 参照）．

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = 1\ ,\ \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1\ ,\ \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_x = 0 \tag{6.7}$$

である．

図 6.4　単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の x 成分，y 成分をそれぞれ A_x , A_y とすると，図 6.4 に示すように，x 軸上のベクトルは，

$$\overrightarrow{OC} = A_x \boldsymbol{e}_x \tag{6.8}$$

y 軸上のベクトルは，

$$\overrightarrow{OD} = A_y \boldsymbol{e}_y \tag{6.9}$$

である．ベクトルの和の規則から（2.1 節を参照），

$$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y \tag{6.10}$$

となる．

これを使うと，

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y \tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}} \tag{6.12}$$

となる．内積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y)\cdot(B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y)\\ &= A_x B_x \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x + A_x B_y \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y + A_y B_x \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_x + A_y B_y \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y\end{aligned}$$

ここで関係式 (6.7) を使うと，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y \tag{6.13}$$

が得られる．

したがって，力 $\boldsymbol{F}$ のもと，変位 $\boldsymbol{r}$ 移動する場合，仕事は

$$W = Fr\cos\theta = xF_x + yF_y \tag{6.14}$$

と書ける．F_x , F_y , x , y はそれぞれ $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{r}$ の x , y 成分を指す．

いまは平面内で考えたが，これを 3 次元に拡張すると

$$W = Fr\cos\theta = xF_x + yF_y + zF_z \tag{6.15}$$

となる．

系に行った仕事，系が行った仕事　仕事を定義するには，何が何に対して行った仕事かを意識しないと，符号で混乱が生じる．力学では物体の運動が重要で，物体に及ぼす力の源にはふれないことが多い．よって，

$$W = \text{物体のされた仕事} = \text{物体を移動させる力の源が行った仕事} \tag{6.16}$$

を通常，仕事として定義する．

力の符号にも注意が必要である．たとえば，重力中で物体を手で持ち上げるとき，$W = Fz$ (z は高さ方向の移動距離) の $F = mg$ は，手が物体に及ぼす力で方向は z 方向正の向きである．運動方程式に出てくる力 $(-mg)$ とは逆方向であることに注意しよう．

摩擦のある床に沿って，物体を水平方向に移動させたとしよう．水平方向を x 軸にとり，正の向きに移動させる．摩擦力に逆らって物体を移動させるので，物体を移動させる源（手で引っ張る場合，手のことである.）が及ぼす力は，$mg\mu'$（μ' は動摩擦係数）であり，x を移動距離とすると仕事は $mg\mu' x$ となる．この場合も物体が x 方向に運動しているときに働いている摩擦力 $-mg\mu'$ は手の引っ張る力と反対向きになることに注意しよう．

微小な仕事 変位の大きさがごく小さく，よって力のした仕事も小さくなるとき，それを微小な仕事という．変位が微小であることを意味する記号，Δx, Δy を使うと，微小な仕事 ΔW は

$$\Delta W = \Delta x\, F_x + \Delta y\, F_y \tag{6.17}$$

と書ける．Δx, Δy を成分とする，微小な変位ベクトル $\Delta \boldsymbol{r}$ を用いると，

$$\Delta W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} \tag{6.18}$$

となる．

エネルギー 物体，あるいは空間は，何らかの**仕事をする能力**をもっている．これを「**エネルギー**をもつ」という．ある物体，あるいは空間が，一体どれほどのエネルギーをもっているかは，実際に仕事をした量で測定しなければばならない．しかし，物体や空間が，どんな仕事をするのかは，そう簡単にはわからない．これまで知られていなかった形の仕事をする能力をもっているかもしれないからだ．このため，物体や空間のもつエネルギーは不定だと考えておくべきである．

☞ たとえば 20 世紀にはいるまで，質量をもっているということはエネルギーをもっているとは考えられなかった．有名なアインシュタインの $E = mc^2$ により，質量はエネルギーの一形態であることがわかった．

しかし，物体や空間があるやり方で仕事をして E という仕事量の仕事を終えたとすると，この物体や空間は，少なくとも E というエネルギーをもっていたことがわかる．この意味で，物体や空間のもつエネルギーの最小値はわかっている．

簡単な例を挙げてみよう．高さ h にある質量 m の物体 A について，物体が h だけ地面に落下した場合，力の源（この場合，地球）は mgh の仕事をする．物体 A が地面に静止している同じ質量の物体 B に当たり，A は静止し，B は h だけ上方に放り上げられる（図 6.5）とする．このとき B は，力に対して mgh の仕事をしたことになる．もちろんこの仕事は，物体 A が地面に到達して，物体 B に対してした仕事によるものである．すなわち，物体 A は，地面にあるときに比べて，高さ h にあるときには

$$E = mgh \tag{6.19}$$

の仕事をする能力がある．つまり高さ h にある質量 m の物体のエネルギーは $E = mgh$ である．このように物体の位置によって，その物体のもつエネルギーは変化する．この意味で，こうしたエネルギーを**位置エネルギー**（**ポテンシャルエネルギー**）とよぶ．

同様に，バネ定数 k のバネに質量 m の物体が結ばれている場合，手で伸ばされたバネは，仕事をする能力，すなわちエネルギーをもっている．バネの伸びを x とすると，手が加える力の平均は

☞ ここでいう F はバネの復元力に逆らって手がバネに及ぼす力なので，$+kx$ である．

$$\overline{F} = \frac{0 + kx}{2} = \frac{kx}{2} \tag{6.20}$$

図 6.5　物体 A が物体 B に当たり，B は h だけ上昇する．

変位の大きさは伸び x であるから，x だけ伸びたバネは，

$$E = \overline{F}x = \frac{kx^2}{2} \tag{6.21}$$

の位置エネルギーをもつことになる．

これを積分の考え方で求めることもできる．微小な変位 Δx だけ伸ばすのに微小な仕事 W だけなされたとすると，

$$\Delta W = F\Delta x = kx\Delta x \tag{6.22}$$

これは図 6.6 に示すような細長い矩形の面積である．伸び x になるまでの全体の仕事量はこの矩形をすべてたし足し合わせた面積である．これは直角三角形の面積に等しくなる．すなわち全仕事量は

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \tag{6.23}$$

図 6.6　細長い矩形と積分

このとき，「矩形の面積をすべて足し合わせる」という意味で，$\displaystyle\int$ (sum

（合計）の頭文字を縦に伸ばしたもの）という記号を用いて，

$$W = \int \Delta W = \int F\Delta x = \int F\Delta x = \int kx\Delta x$$
$$= \frac{1}{2}kx^2 \qquad (6.24)$$

となる．これが数学で言う「積分」である．数学では Δx のかわりに dx を用いて

$$W = \int dW = \int F dx = \int kx dx$$
$$= \frac{1}{2}kx^2 \qquad (6.25)$$

と書く．dx は無限小の微小量を意味する．

すでに 3.1 節で述べた微分と積分は密接な関係にある．積分 $W = \int F\,dx$ は W を微分すると F になる．実際，$kx^2/2$ を x で微分すると kx という復元力になる．

積分　代表的な関数の積分についてまとめておこう．

1. $F = x^n$ の積分．
$$W = \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad (6.26)$$
なぜなら，右辺を微分すると
$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n \qquad (6.27)$$
となるからである．
2. $\sin x$, $\cos x$ の積分．
$$\begin{aligned} W_1 &= \int \sin x dx = -\cos x \\ W_2 &= \int \cos x dx = \sin x \end{aligned} \qquad (6.28)$$
これも微分をして確かめられる．$dW_1/dx = d(-\cos x)/dx = \sin x$, $dW_2/dx = d(\sin x)/dx = \cos x$ となるからである．
3. e^x の積分．
$$W = \int e^x dx = e^x \qquad (6.29)$$
4. より複雑な関数の積分は以下のように行う．
   (a) 積分表を引く．
   (b) コンピュータの数式処理ソフトを使う．たとえば Mathematica など．
   (c) コンピュータで数値積分する．
   (d) すべてがうまくいかないときは，厚手のボール紙に関数を書き，それをはさみでくりぬき，重さを量る（図 6.7）．

☞ たとえば岩波公式 I（森口繁一他著，岩波書店），数学大公式集（Gradshteyn 他著，丸善）など．

図 6.7　積分の最後の手段 (?)

運動エネルギー　速さ v で運動する物体は，それだけで仕事をする能力をもっている．これを**運動エネルギー**とよぶ．運動エネルギーは，反対方向，つまり $-v$ で運動していても同じである．右方向に運動する場合と，左方向に運動する場合とで，運動エネルギーに違いはない．あるいは東西南北，どの方向を向いていても運動エネルギーは同じである．(**空間の対称性**という.)

このことから，v の関数としてのエネルギー $E(v)$ は，v の**偶関数**でなければならない．つまり

☞ 奇数次の項 $Cv + Dv^3 + \cdots$ が混じると $E(v) \neq E(-v)$ となってしまう．

$$E(v) = Av^2 + Bv^4 + \cdots \tag{6.30}$$

係数 A を求めてみよう．速さ v で運動している質量 m の物体をストッパーに当てて停止させよう（図 6.8）．JR の貨物駅で見かける，土盛りした車両止めを想像するとよい．物体がストッパー（土盛りした車両止め）にあたった瞬間から完全に止まるまで，ある一定の力 F（摩擦力）が働くとしよう．速度はこれにより減速される．減速の割合は摩擦力により，

$$m\frac{dv}{dt} = -F \tag{6.31}$$

できまる．

F は物体がストッパーに及ぼす力，$-F$ はストッパーが物体に及ぼす力である．前者による仕事は，

$$W = \int F\,dx = -m\int \frac{dv}{dt}dx = -m\int dv\frac{dx}{dt} \tag{6.32}$$

とかけるので，$dx/dt = v$ を用いて，

☞ $\dfrac{dv}{dt}dx = \dfrac{dx}{dt}dv$ はこれらがもともと微小量 Δx, Δv, Δt からきており，よって $\Delta x \times \Delta v = \Delta v \times \Delta x$ が成り立っていることから理解できる．

$$W = -m\int_v^0 v\,dv = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.33}$$

つまりストッパーは $\dfrac{1}{2}mv^2$ のしごとを “された” ことになり，物体はこれだけの仕事をする能力をもっていたことになる．よって物体の運動のエネ

図 6.8　速さ v で運動する物体をストッパーで止める．

ルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.34}$$

となる．

関係式（6.30）でいえば，係数 $A = m/2$，$B = 0$ であることがわかる．実際にはアインシュタインの相対性理論によって，$B = \dfrac{3}{8c^2}m$ である．c は光速である．Bv^4 の項は Av^2 の項とくらべて，$\dfrac{3}{4}\dfrac{v^2}{c^2}$ なので，日常的な速さでは完全に省略してよい．つまり，光速と比べて十分遅い速さで運動する物体の運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.35}$$

と書ける．

☞ 正確には $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ である．$v = 0$ とすると静止エネルギー $E = mc^2$ が得られる．運動エネルギー K は E から静止エネルギー mc^2 を引いたものとして定義される．

エネルギー保存則　2400 年も前に，ギリシャの哲学者デモクリトスは，「万物は原子からできている」と述べ，さらに「無から有は生じない」「有が無に帰することもない」と述べた．これは現代物理学の立場からいうと，「物質不滅の法則」または「エネルギー不滅の法則」である．エネルギーが無の状態から突然発生することはない．存在していたエネルギーが突然なくなることもない．これを**エネルギー保存則**という．

☞ 超能力でものを出したりするのは物質不滅の法則に反している．これを信じるのは 2400 年以上前の科学に逆戻りすることである．

エネルギーは，位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）V，運動エネルギー K のような力学的エネルギーの他に，物体が熱を持ったために有する**熱エネルギー**，電気や磁気に起因する**電磁エネルギー**，化学的変化を起こすことで仕事に変換される**化学エネルギー**などなど，様々なエネルギー形態がある．

エネルギーは異なるエネルギーに変換されることもある．たとえば，地上 h で速さ v で飛んでいた物体が地上に落下し，完全に止まったとしよう（図 6.9）．このとき，物体のエネルギー（力学的エネルギー）$K + V$ は 0

☞ エネルギー危機を救うエネルギーの創成とは，人類に使いやすい形態へとエネルギーを変換することである．

になる．一方，地面との衝突で物体や地面の温度が上昇し，熱エネルギー E_t が発生するであろう．さらに，地面との衝突の際，音が発生する．この音はエネルギー E_s をもっている．このとき，エネルギーの保存則は

$$K + V = E_t + E_s \tag{6.36}$$

であることを示している．

図 6.9　力学的エネルギー $K+V$ が熱エネルギー E_t と音のエネルギー E_s に変わる．

力学的エネルギーの保存　位置エネルギー V と運動エネルギー K は，**力学的エネルギー**とよばれ，これらは熱などの他の形態のエネルギーに転換しなければ，その合計は常に不変である．これを**力学的エネルギーの保存則**という．もちろん，時間の経過とともに，位置エネルギーと運動エネルギーは相互に変換されるが，その総計 $E = K + V$ は常に一定である．

$$K + V = E \ （一定） \tag{6.37}$$

高さ h にある静止した物体は，位置エネルギー

$$V = mgh \tag{6.38}$$

をもつ．これが h だけ落下して，速さ v になると，そのときの運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.39}$$

である．このときの力学的エネルギー $K+V$ は，

$$\underbrace{0 + mgh}_{\text{高さ } h \text{ における } K+V} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + 0}_{\text{落下地点での } K+V} = （一定） \tag{6.40}$$

である（図 6.10）．すなわち，

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore v = \sqrt{2gh} \tag{6.41}$$

図 6.10 力学的エネルギー保存

これは 3.2 節で示した，h だけ落下したときの速さ v を与える式 (3.39) である．

バネの振動でも，力学的エネルギーの保存則を適用することができる（図 6.11）．いま，A だけ伸びた点での位置エネルギー $V = \frac{1}{2}kA^2$ を考えると，その点での静止している物体の力学的エネルギー $K + V$ は，振動の中心点での速度を v_0 として，

$$\underbrace{0 + \frac{1}{2}kA^2}_{A\text{ 点での } K+V} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 + 0}_{\text{原点での } K+V} \tag{6.42}$$

である（図 6.10）．さらに，バネが A だけ縮んで速さ v が 0 になると，

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 + 0}_{\text{原点での } K+V} = \underbrace{0 + \frac{1}{2}kA^2}_{B\text{ 点での } K+V} \tag{6.43}$$

上の式より

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{6.44}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}A \tag{6.45}$$

が得られる．

ところで，これはすでに前章で述べた単振動であるから，

$$x = A\sin\omega t = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{6.46}$$

である．速度 v は

$$v = \frac{dx}{dt} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{6.47}$$

図 6.11　バネの振動における力学的エネルギー保存

したがって，

$$
\begin{aligned}
E = K + V &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{m}{2}A^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)^2 + \frac{k}{2}A^2\left(\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)^2 \\
&= \frac{k}{2}A^2\left\{\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)^2 + \left(\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)^2\right\} \qquad (6.48)
\end{aligned}
$$

一般に

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \qquad (6.49)$$

が成り立つので，

$$E = \frac{k}{2}A^2 = (一定) \qquad (6.50)$$

となっており，確かにバネの振動でも力学的エネルギーの保存則が成り立っている．

保存力　力学的エネルギー保存則が成り立つような位置エネルギーが定まるとき，その位置エネルギーを与える力を**保存力**という．

位置エネルギー mgh を与える重力 mg も，バネの位置エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ を与える復元力 $-kx$ も保存力である．では，保存力でない力とはどういうものか．たとえば摩擦力がその例である．摩擦力がある場合，力学的エネルギーの保存則は成り立たない．

重力の場合について，もっと詳しく考察してみよう（図 6.12）．位置エネルギー $V = mgh$ は，地面の高さ h の点まで，質量 m の物体を移動させる場合に，重力に対してなされた仕事であった．もちろん，地面から鉛直に A→B と移動した場合，その仕事は mgh であるが，この移動の経路を A→C→B としてみよう．A→C では重力に対して仕事をしないので，C→B

でのみ仕事がなされる．これは斜面上の仕事であるが，やはり mgh となる．このようにして，A から B に移動するとき，経路を変えてもなされる仕事は変わらない．

図 6.12　A→B の仕事，A→C→B の仕事

一方，移動による過程で摩擦力が働く場合を考える．この場合，摩擦によって熱が発生してしまう．点 C が遠くにあればあるほど，この摩擦で失われる力学的エネルギーは多くなる．そのため，経路によって仕事は異なってしまう．この場合，保存力ではなくなる．

保存力の場合，保存力 F と位置エネルギー V の関係は

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} \tag{6.51}$$

となる．たとえばバネの復元力 $-kx$ と位置エネルギー $\dfrac{1}{2}kx^2$ は

$$-\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{1}{2}k \times (2x) = -kx \tag{6.52}$$

となっている．

一般に，位置エネルギー V が 3 次元座標 x, y, z の関数，$V(x, y, z)$ となっている場合，保存力もベクトルとなる．これを $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ と表すと，

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\ ,\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\ ,\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{6.53}$$

となる．$\dfrac{\partial}{\partial x}$ という記号は見慣れないかもしれない．これは他の変数の変化を無視して，x だけで微分する**偏微分**というものである．

例として，位置エネルギー，

$$V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \tag{6.54}$$

という位置エネルギーを考えよう．このとき，たとえば x に関する偏微分は，y, z を定数と見なして x に関して微分するので，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)\right) = kx + 0 + 0 = kx$$

となる．式（6.53）より保存力は

$$F_x = -kx \ , \ F_y = -ky \ , \ F_z = -kz \tag{6.55}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{F} = -k(x, y, z) = -k\boldsymbol{r} \tag{6.56}$$

である．

力が保存力であるかどうかは，このように力が

$$\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{6.57}$$

という形で導出できるような関数 V が存在するかどうかできまる．このような V を**ポテンシャル関数**とよぶ．上の式を簡単に

☞ ナブラ記号

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

を使って，$\boldsymbol{F} = -\nabla V$ と書くこともある．

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F} = -gradV \\ (grad = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}))\end{gathered} \tag{6.58}$$

と書くことが多い．動摩擦力など保存力でない力には，上の関係を満たす関数 V が存在しない．ある位置に移動するまでの仕事がその位置だけで決まらず，経路によってしまうので，x, y, z の関数として位置エネルギーが書けないからである．

逆に力からポテンシャル関数を計算することも可能である．この場合，

$$V(x, y, z) = -\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{6.59}$$

からポテンシャル関数は計算される．ポテンシャル関数は，物体が受けている力 $\boldsymbol{F}$ に逆らって，$-\boldsymbol{F}$ の力を加えて物体を移動させるとと増大する．マイナス符号はそこからきている．

この見慣れない積分の意味は，以下の通りである: まず，移動する経路を微小線分 $d\boldsymbol{x}$ に分けて，その位置での力 $\boldsymbol{F}$ との内積をとる．

$$\int \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{x} = \int F_x\, dx + \int F_y\, dy + \int F_z\, dz \tag{6.60}$$

この結果をすべての微小線分に関して，足し合わせる．保存力の場合，この積分値が始点と終点の座標だけによっており，途中の経路には依存しない．

等ポテンシャル面　$V(x, y, z) =$ 一定 であるような (x, y, z) は面を形成する．これを**等ポテンシャル面**という．たとえば，鉛直上方向を z 向きにとると

$$V(x, y, z) = mgz \tag{6.61}$$

であり，これから導かれる力は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ &= -(0, 0, mg)\end{aligned} \tag{6.62}$$

となる．このとき，$V(x,y,z)=$ 一定 の面は，$z=$ 一定 の面，つまり水平面のことである．これは別名,「等高面（線）」のことである．

等ポテンシャル面と力 $\boldsymbol{F}$ は常に垂直である（図 6.13）．等ポテンシャル面上を物体が移動しても，力は仕事をしない．このときの仕事は $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$ だからである．ここに $\boldsymbol{s}$ は図 6.13 に示すように，等ポテンシャル面上の，物体の移動ベクトルである．

図 6.13　等ポテンシャル面と力

力学的エネルギーの保存則の導出　保存力に対して，力学的なエネルギーは保存する．このことは，以下のようにして証明できる．簡単のため，1 次元を考えよう．時刻 t での力学的エネルギー $E(t)$ は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和,

$$E(t)=\frac{mv(t)^2}{2}+V(x(t)) \tag{6.63}$$

と書ける．$v(t), x(t)$ は時刻 t での粒子の速度と位置である．これを時間で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{mv(t)^2}{2}+V(x(t))\right)\\ &= mv(t)\frac{dv(t)}{dt}+\frac{dx(t)}{dt}\frac{dV}{dx}\\ &= v(t)\left(m\frac{dv(t)}{dt}-F(x(t))\right)=0.\end{aligned} \tag{6.64}$$

ここで，$F(x)=-\dfrac{dV(x)}{dx}$ を用いた．よって $E(t)$ は時間によらず一定で，エネルギーは保存している．

力学的エネルギーの保存則は仕事からも導くことができる．物体が力 $\boldsymbol{F}$ のもと，運動を行うと運動エネルギーが変化する．その変化分は，ちょうど物体が外（たとえば重力）から行われた仕事に等しい．はじめ，物体は位置 $\boldsymbol{x}_0$ で速度 $\boldsymbol{v}_0$ で運動しており，力 $\boldsymbol{F}$ のもとで運動し，位置 $\boldsymbol{x}_1$ で速度 $\boldsymbol{v}_1$ になったとしよう．運動エネルギーの変化は，物体に与えられた仕事に

よるものだと考えられる．

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \text{外から行われた仕事} = \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{6.65}$$

ここで積分を原点 O からのものに分解すると

$$\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}_1} = \int_{\boldsymbol{x}_0}^{O} + \int_{O}^{\boldsymbol{x}_1} = -\int_{O}^{\boldsymbol{x}_0} + \int_{O}^{\boldsymbol{x}_1}$$

となる．よって，

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \int_O^{\boldsymbol{x}_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \int_O^{\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} \to \frac{1}{2}mv_1^2 + V(\boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(\boldsymbol{x}_0) \tag{6.66}$$

となる．

なお，ここでの証明は，ニュートンの運動方程式からエネルギーの保存則を導いたが，エネルギーの保存則はより一般的に成り立つ．高速の粒子を扱う相対性理論，ミクロな世界を記述する量子力学，多数の粒子を記述する熱力学でも，エネルギーの保存則は成り立っている．

6.2　衝突問題

運動量の保存則とエネルギーの保存則を使うと，物体間の衝突が見通しよく扱える．はじめに複数の粒子からなる系の運動量の保存則を証明しておこう．

☞ 大きさが無視できるというのは，粒子間の距離など考察している系のスケールに対して，物体の大きさが小さいということである．

大きさを無視できる物体を**質点**とよぶ．いま，質点が N 個あるとする．i 番目の質点は，$1\sim i-1, i+1\sim n$ 番目の質点から力を受けているとする．このとき式 (3.27) は

$$\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \boldsymbol{F}_{i1} + \boldsymbol{F}_{i2} + \cdots + \boldsymbol{F}_{iN} = \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \tag{6.67}$$

である．ここで全運動量 $\boldsymbol{P}$ を

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \cdots + \boldsymbol{p}_n = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_k \tag{6.68}$$

で定義すると，

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij} \quad &= \quad \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \cdots + \boldsymbol{F}_{1N} \\ &+ \quad \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + \cdots + \boldsymbol{F}_{2N} \\ &+ \quad \boldsymbol{F}_{31} + \boldsymbol{F}_{32} + \cdots + \boldsymbol{F}_{3N} \\ &+ \quad \cdots\end{aligned}$$

となる．ところで右辺は作用・反作用の法則

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \tag{6.69}$$

で次々と項がうち消しあって $\mathbf{0}$ になる．よって互いに力を及ぼしあっている (内力) 質点系の全運動量は保存していることがわかる．すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \mathbf{0} \tag{6.70}$$

である．

重心系と 2 粒子衝突　物理で現れる多くの衝突現象は 2 つの粒子の衝突の集まりとしてとらえることができる，または近似することができる．物質の最小の構成要素である素粒子の性質を調べるには，加速器で粒子同士をぶつける手段がもっとも強力であるし，気体の圧力などの性質も原子・分子の衝突現象としてとらえられる．ビリヤードの玉は非常に膨大な粒子の集まりであるが，この衝突も 2 粒子の衝突として近似できるし，惑星の運動も 2 個の質点の運動として近似できる．そこでここでは 2 粒子衝突を考えよう．

はじめ，2 番目の粒子は静止している場合を考え，これを**実験室系**とよぶ．衝突前の速度には i という添え字をつけ，衝突後の速度には f という添え字をつけると，運動量の保存則は

$$m_1\boldsymbol{v}_{1i} = m_1\boldsymbol{v}_{1f} + m_2\boldsymbol{v}_{2f} \tag{6.71}$$

となり，エネルギーの保存則は

$$\frac{m_1\boldsymbol{v}_{1i}^2}{2} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_{1f}^2}{2} + \frac{m_2\boldsymbol{v}_{2f}^2}{2} \tag{6.72}$$

となる．3 次元でこれを解くのはやっかいである．そもそも片方を止まっているとしているので，粒子 1 と粒子 2 の対称性が崩れてしまっている．

☞ だから試験にはほとんど出ない．

そこで 2 つの粒子の重心という対称な位置を考えよう．重心の速度は運動量の保存則により一定である．その速度を $\boldsymbol{V}_G$ として

$$\boldsymbol{V}_G = \frac{m_1\boldsymbol{v}_{1i}}{m_1+m_2}\ ,\ \boldsymbol{v}_{ij} = \boldsymbol{v}'_{ij} + \boldsymbol{V}_G\ (i=1,2\ \ j=i,f) \tag{6.73}$$

である．この重心速度で動く系を**重心系**とよぶ．重心系での速度は

$$\boldsymbol{v}'_{1i} = \boldsymbol{v}_{1i} - \boldsymbol{V}_G = \frac{m_2\boldsymbol{v}_{1i}}{m_1+m_2} \tag{6.74}$$

$$\boldsymbol{v}'_{2i} = -\boldsymbol{V}_G = -\frac{m_1\boldsymbol{v}_{1i}}{m_1+m_2} \tag{6.75}$$

である．重心系での運動量保存則は

$$m_1\boldsymbol{v}'_{1i} + m_2\boldsymbol{v}'_{2i} = m_1\boldsymbol{v}'_{1f} + m_2\boldsymbol{v}'_{2f} = \mathbf{0} \tag{6.76}$$

エネルギーの保存則は

$$\frac{m_1\boldsymbol{v}'^2_{1i}}{2} + \frac{m_2\boldsymbol{v}'^2_{2i}}{2} = \frac{m_1\boldsymbol{v}'^2_{1f}}{2} + \frac{m_2\boldsymbol{v}'^2_{2f}}{2} \tag{6.77}$$

となる．まず式 (6.76) より

$$\boldsymbol{v}'_{2i} = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{v}'_{1i}\ ,\ \boldsymbol{v}'_{2f} = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{v}'_{1f} \tag{6.78}$$

となる．これを式 (6.77) に代入して，

$$v'_{1i} = v'_{1f}\ ,\ v'_{2i} = v'_{2f} \tag{6.79}$$

を得る．つまり各粒子のエネルギー (速さ) は重心系では衝突前後で変わらないのである．

こうして

1. 式 (6.78) のように衝突前後で運動方向が平行
2. 式 (6.79) のように各粒子の速さは同じまま

ということがわかる．

例題 6.1　エネルギーの増加分

N 個の粒子が運動量 $\boldsymbol{p}_i \quad (i=1,\cdots,N)$ をもっている．それぞれの質量は m_i である．互いに相互作用した後，これらは $\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{q}_i \quad (i=1,\cdots,N)$ となった．

1. 運動エネルギーの増加分 ΔE を求めよ．
2. 速度 $\boldsymbol{V}$ の系で見ても運動エネルギーの増加分 ΔE は変化しないことを示せ．

解　1.

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sum_i^N \frac{(\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{q}_i)^2}{2m_i} - \sum_i^N \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m_i}\\ &= \sum_i^N \frac{\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{q}_i}{m_i} + \sum_i^N \frac{\boldsymbol{q}_i^2}{2m_i}\end{aligned}$$

2. 速度 $\boldsymbol{V}$ でみた場合，各々の粒子の速度は $-\boldsymbol{V}$ だけ変化して見える．よって運動量は $-m_i\boldsymbol{V}$ だけ減少する．これより，

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sum_i^N \frac{(\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{q}_i-m_i\boldsymbol{V})^2}{2m_i} - \sum_i^N \frac{(\boldsymbol{p}_i-m_i\boldsymbol{V})^2}{2m_i}\\ &= \sum_i^N \frac{(\boldsymbol{p}_i-m_i\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{q}_i}{m_i} + \sum_i^N \frac{\boldsymbol{q}_i^2}{2m_i}\\ &= \Delta E - \sum_i^N \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{q}_i = \Delta E - \boldsymbol{V}\cdot\sum_i^N \boldsymbol{q}_i\end{aligned}$$

互いに相互作用している系では運動量の保存則が成立しているので，

$$\sum_i^N(\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{q}_i) = \sum_i^N \boldsymbol{p}_i \ \rightarrow\ \sum_i^N \boldsymbol{q}_i = 0$$

である．よって速度 $\boldsymbol{V}$ の系でみても運動エネルギーの増加分 ΔE は変化しない．

☞ このことは「エネルギーがうまく増加するなんて言う都合のよい系は存在しない」ことを表している．

換算質量　質点が 2 個だけの場合，あたかも問題が 1 粒子のポテンシャル中の運動のように扱える．これを示そう．作用・反作用の法則より

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} &= \boldsymbol{F} \\ m_2 \dfrac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} &= -\boldsymbol{F} \end{cases}$$

なので

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{0} \tag{6.80}$$

となる．よって全運動量

$$\boldsymbol{p} = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{6.81}$$

は保存する．重心の座標 $\boldsymbol{R}$ は (第 2 章の式 (2.41) 参照)

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{6.82}$$

なので

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{0} \tag{6.83}$$

から重心の速度 $\boldsymbol{V}_G = \dot{\boldsymbol{R}}$ は保存することがわかる．

☞ 力学では時間微分を変数の上にドットをつけることで表す．たとえば

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

と記す．

(6.80) より

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\boldsymbol{F}$$

となるので

$$\boldsymbol{r} \stackrel{def}{=} \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \tag{6.84}$$

という相対座標と

$$\mu \stackrel{def}{=} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{6.85}$$

という**換算質量**を定義すると

$$\mu\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{6.86}$$

を得る．つまり質量 μ の質点が力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のもとで運動している運動方程式が導かれる．

例題 6.2　地球の公転の換算質量

地球の質量を M_E，太陽の質量を M_S としたとき，換算質量を計算せよ．太陽の質量が地球の 33 万倍である．換算質量は地球の質量の何倍か？

解　式 (6.85) より

$$\mu = \frac{M_E \times M_S}{M_E + M_S}$$

$M_E/M_S = 1/330000$ より

$$\mu = M_E \times \frac{1}{1+\frac{M_E}{M_S}} = M_E \times \frac{330000}{330001} = 0.999997\, M_E$$

よって，換算質量 μ は地球の質量 M_E とほとんど同じである．

例題 6.3　重心速度と相対速度による運動エネルギーの表示

2 つの粒子の重心速度を $\boldsymbol{V}$, 相対速度を $\boldsymbol{v}$ とする．速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ で運動している 2 つの粒子の運動エネルギーの和,

$$\frac{m_1 \boldsymbol{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \boldsymbol{v}_2^2}{2}$$

を $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{v}$ により表せ．

解

重心の速度 $\boldsymbol{V}$，相対座標の速度 $\boldsymbol{v}$ は，式 (6.82) と式 (6.84) より，

$$\boldsymbol{V} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}\ ,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

である．これらから逆に，

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{V} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}\ ,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{V} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}$$

となる．これらを $\dfrac{m_1 \boldsymbol{v}_1^2}{2} + \dfrac{m_2 \boldsymbol{v}_2^2}{2}$ に代入し，運動エネルギーは

$$\frac{m_1+m_2}{2}V^2 + \frac{\mu}{2}v^2$$

と表せる．第 2 項に出てくる μ は換算質量である．

2 つの粒子が相互作用しても，重心の速度は変化しない．よって，第 2 項のみが運動エネルギーの変化をもたらす．

演習問題 6

A

1. **スーツケースを移動するときの仕事**

質量 M のスーツケースを床面と角度 θ をなすひもで図のように引きずるとき，1 m 移動させるときに要する仕事はいくらか．ただし，ひもの張力を T，スーツケースと床の動摩擦係数を μ' とせよ．

2. **単振動のエネルギー保存**

バネ定数 k のバネに質量 m の物体が結ばれ単振動する．最初，最大振幅を A にして放たれたとき，

(a) 放たれる直前のバネの 運動エネルギー K_0 と位置エネルギー V_0 を求めよ．

(b) バネが自然の長さまで縮まった瞬間の運動エネルギー K と位置エネルギー V を求めよ．ただし，物体の速さを v とする．

(c) 前問で物体の速さをエネルギー保存則から求めよ．

(d) 物体の位置が A の 1/2 になった瞬間の物体の速さを求めよ．

3. **振り子の運動エネルギー**

うでの長さが ℓ の振り子がある．振り子の先には質量 m の質点がついており，質点は中心と軽い糸で結ばれている．これが最下端にあるとき初速度 v_0 を与えた．

(a) これが完全な円運動として運動したとき，最高点の速度 v を求めよ．

(b) 完全な円運動を行うための条件を求めよ．

4. **$V = C/r$ のときの力**

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ として，ポテンシャル関数 V が

$$V = \frac{C}{r}$$

で与えられている．このとき，力 $\boldsymbol{F}$ を求めよ．