12 クーロンの法則

本章から電磁気学の基本を学んでいく．電磁気現象は，静電気，電流，磁気，電磁誘導，電磁波と多岐にわたる．この章では，最も簡単な静電気の法則について学ぶ．

12.1 クーロンの法則と電場

静電気　ギリシア時代から，静電気は知られていた．乾燥した日にセーターが静電気をもち，パチパチ音を立てるのは，みな覚えがあるだろう．静電気は精密電気製品の大敵でもある．PC のメモリ増設をするためメモリを購入すると，静電気を逃がす帯がついてくる場合がある．静電気をもったままメモリ増設をすると，基盤やメモリが壊れるからである．帯がついてこない場合でも，メモリにさわる前にかならず金属にさわって静電気を逃がすようにと注意書きが入っていることがある．この静電気とはなにものか？

まず電気を帯びている状態を**帯電**と呼ぼう．これは，物質に**電荷**がたまっている状態である．すると電荷とは何かという質問がわく．電荷は，質量と同様，物質を構成している電子や陽子の基本的な性質の 1 つである．原子は，陽子，中性子，電子から構成されるが，このうち陽子はプラスの電荷をもち，電子はマイナスの電荷をもつことが知られている．陽子の電荷と電子の電荷の絶対値は等しい．その値は

$$e = 1.60217646 \times 10^{-19}\,C \tag{12.1}$$

である．e は**素電荷**とよばれる．C は電荷の単位，クーロンである．この素電荷を使うと，陽子の電荷は $+e$，電子の電荷は $-e$ と表される．電荷は消滅したり，生成されたりはしない．あらゆる自然現象において，**電荷の保存則**が成立していることが確かめられている．

陽子と電子の電荷の絶対値は厳密に等しいので，原子は中性である．原子，分子が集まって物質となるので通常の物質は電気的に中性である．しかしそれらをこすり合わせると，電子の一部が移動し，帯電することがある．たとえば，毛皮，セーターでガラス，プラスティックをこすると，これらは帯電する．

☞ 陽子と電子の質量はばらばらであるが，電荷の絶対値は厳密に等しい．

☞ 陽子，中性子は $2e/3$ の電荷をもった u クォークと,$-e/3$ の電荷をもった d クォークからなっている．たとえば，陽子は uud の組み合わせ，中性子は udd の組み合わせからなっている．一方，電子はそれ自身が基本粒子である．

クーロンの法則　たまっている電荷の量を**電気量**とよび，Q と表す．電気量は陽子の数から電子の数を引き，それに素電荷を掛けたものである．しかし素電荷の値があまりに小さく，電子と陽子の数は膨大なため，通常，Q は連続変数とみなす．この電気量を用いて，帯電した粒子，物質（まとめて物体と呼ぼう）の間に働く力を記述するのが，**クーロンの法則**

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{12.2}$$

である．ここで Q_1, Q_2 は 2 つの物体の電気量，r は物体間の距離である．2 つの物体は大きさが無視できるとしている．こうした大きさが無視できる電荷を**点電荷**とよぶ．

大きさが無視できるとは，正確には物体の大きさに比べて，距離がはるかに大きいという意味である．

$$k = 8.987742438 \times 10^9\, Nm^2/C^2 \tag{12.3}$$

であり，これは**クーロン定数**とよばれる．クーロン定数は**真空の誘電率** ϵ_0 と

☞ 誘電率については第 14 章参照

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{12.4}$$

という関係がある．

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}\, C^2/(Nm^2) \tag{12.5}$$

である．

☞ ϵ_0 の値はややこしいが，これは実は光速を c として，$\dfrac{10^7}{4\pi c^2}C^2/(N\,m^2)$ となっている．$10^7/4\pi$ という係数は，自然法則から導かれるというよりも，単位系により決まっている．この選び方は国際単位系（SI 単位系）によるものである．

クーロンの法則が万有引力（(7.9) 式）に似ていることに注意しよう．万有引力における質量が電荷になり，万有引力定数がクーロン定数になっただけで，距離依存性は同じである．違いは，電荷には正負があることである．これによりクーロン力は引力になったり斥力になったりするが，万有引力は常に引力である．

力は方向をもったベクトル量である．クーロン力も万有引力と同様，物体間を結ぶ直線上にそっている（図 12.1）．これを式で表すと，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{Q_1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12} \\ \boldsymbol{F}_{Q_2} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\end{aligned} \tag{12.6}$$

である．$\boldsymbol{F}_{Q_1}$ は Q_1 に働く力，$\boldsymbol{F}_{Q_2}$ は Q_2 に働く力である．また，$\boldsymbol{r}_{12}$ は Q_2 から Q_1 に向かうベクトルで，

$$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \quad \hat{\boldsymbol{r}}_{12} = \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} \tag{12.7}$$

である．$\hat{\boldsymbol{r}}_{12}$ は Q_2 から Q_1 に向かう**単位ベクトル**である．

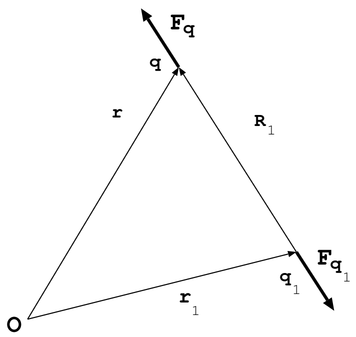

図 12.1 クーロン力

12.2 電場

クーロン力と電場 このクーロン力を別の見方をしてみる．すなわち，電荷 Q_2 が**電場**

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12} \tag{12.8}$$

をつくる．そこに電荷 Q_1 が置かれ，

$$\boldsymbol{F}_{Q_1} = Q_1 \times \boldsymbol{E} \tag{12.9}$$

をうけるという見方である．このように電磁気学では力を求める前に電場を求めておき，その電場に電荷を掛けて力を導く．

力で見た場合，2 つの電荷の間だけに電気力が存在しているような記述になる．一方，電場から解釈すると，**電荷の存在により空間のあらゆる場所に電場が生成されており，そこに別の電荷が置かれると力が働く**という記述になる．後者の見方をする場合，クーロンの法則は電荷がつくる電場を求める法則と解釈できる．

場 クーロンの法則により，電場ベクトルが求められた．この電場ベクトルは，1 つではなく，**考えている空間上すべての点において定義されている**．このような空間の関数を**場**とよぶ．ベクトルの場合，特に**ベクトル場**とよぶ．

たとえば，力学で議論した粒子の位置，速度はその粒子がある位置だけで定義されるので，場ではない．一方，力，ポテンシャルは粒子がなくても定義されるので，場である．川の流れの場合，流れている粒子の時間発展を追ってもよいが，川の位置を指定して，そこでの密度，速度を与えてもよい．後者が場の考え方である．

☞ ネオンサインの電気が右から左に一つずつついては消える様子を思い浮かべよう．これはある場所で光っているか，消えているかという場の量が変化していると考えることが出来る．ネオンサインを考えず光だけに注目していると，あたかも光った粒子が運動しているように見える．このように粒子の運動も場による記述が可能である．

複数の電荷 電荷がたくさんあった場合，電場は個々の電荷のつくる電場の**重ね合わせ**（足し算）となる．位置 $\boldsymbol{r}_i$ に存在する電荷 $Q_i (i = 1, 2, \cdots, N)$

が，位置 $\boldsymbol{r}$ につくる電場は，重ね合わせより以下の表式で与えられる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{R_1^2}\hat{\boldsymbol{R}}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{R_2^2}\hat{\boldsymbol{R}}_2 + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_N}{R_N^2}\hat{\boldsymbol{R}}_N \\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{R_i^2}\hat{\boldsymbol{R}}_i\end{aligned} \tag{12.10}$$

となる．ここで $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i$ である．これにより，位置 $\boldsymbol{r}$ に電荷 Q を置いたときに，この電荷が受ける力は $Q\boldsymbol{E}$ として計算できる．

12.3　静電ポテンシャル

位置エネルギーと静電ポテンシャル　実際には式 (12.10) を用いて電場を求めるのは困難である．この式はベクトルの足し算で方向などを考慮しなくてはならないからだ．

そこで力学の場合を思い出してみよう．力を直接求めず，まず位置エネルギーを求めると，ベクトルの和でなく，エネルギーという方向をもたない量の和を求めればよくなり，問題が簡単になった．また，エネルギーの保存則を用いて現象を解釈できるようになった．そこで電磁気にも位置エネルギーを導入しよう．クーロン力に逆らって仕事をすると位置エネルギーがたまる．この位置エネルギーを表すのに**静電ポテンシャル**を定義する．位置エネルギーと静電ポテンシャルの関係は，

$$(\text{位置エネルギー}) = (\text{電荷}) \times (\text{静電ポテンシャル}) \tag{12.11}$$

である．

静電ポテンシャルは (**電位**とも呼ばれている)

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{R_i} \tag{12.12}$$

で定義される．これより電場は

$$\boldsymbol{E} = -grad\,\Phi(\boldsymbol{r}) \tag{12.13}$$

となる．

連続的な分布　電荷は素電荷からなっているので，電気量は離散的な値（e の整数倍）しかとらない．よって，(12.10) を計算する必要がある．しかし，実際には帯電した物質では電子の電荷は 10^{-10} m 間隔で分布しているので，これらを遠く ($\gg 10^{-10}$m のスケール) から見る限り，連続分布と思ってよいのである．黒板の字を思い描いてみよう．目を近づけてみれば粉のあるところとないところがはっきりと見えるが，チョークの粉の間隔よりも十分離れてみればチョークの濃淡は連続的に変化して見える．同じよ

うに原子間隔よりも大きなスケールから眺めると，電荷は連続的に変化しているように見えるのである（図 12.2）.

図 12.2　近づいてみると黒と白の点だが，遠くから見るとグレーに見える．グレーの濃淡は黒点（白点）の密度で決まっている.

こうした状況は**電荷密度**を使って記述される．電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を用いると，$\boldsymbol{r}$ 付近の微小体積 ΔV の中にある電荷 ΔQ は

$$\Delta Q = \rho(\boldsymbol{r})\Delta V \tag{12.14}$$

で与えられる.

連続的な電荷密度が与えられたときの静電ポテンシャルの表式を求めよう．位置 $\boldsymbol{r}_i$ における微小体積 ΔV_i 中の電荷が ΔQ_i だとする．この場所の電荷密度は $\rho_i = \Delta Q_i/\Delta V_i$ である.

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{\Delta Q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} \tag{12.15}$$

である．体積を無限小にもっていくことで，微小体積の和は体積積分になり，

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dQ(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{12.16}$$

となる．ここで電荷密度を考えたが，表面電荷密度

$$dQ(\boldsymbol{r}') = \sigma(\boldsymbol{r}')dS' \tag{12.17}$$

や線電荷密度

$$dQ(\boldsymbol{r}') = \lambda(\boldsymbol{r}')dr' \tag{12.18}$$

を考えるほうが便利な場合は，

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dQ(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')dS'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{12.19}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dQ(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')dr'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{12.20}$$

となる.

電場を求めるにはこれらの勾配を求めればよい (式 (12.13) を使う).

☞ grad については，第 6 章の保存力のところで説明した．gradV (V はスカラー関数) は，∇V とも書かれる．ここではなれるために ∇ を使って書く．

$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}$ とすると

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2} \tag{12.21}$$

から，式 (12.13) と組み合わせて，電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2} \rho(\boldsymbol{r}') dV' \tag{12.22}$$

となる．

表面電荷密度が与えられている場合は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2} \sigma(\boldsymbol{r}') dS', \tag{12.23}$$

線電荷密度が与えられている場合は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{\boldsymbol{R}}}{R^2} \lambda(\boldsymbol{r}') dr', \tag{12.24}$$

となる．ポテンシャルに比べて電場は，はるかに計算しづらい表式になってしまうことに注意しよう．

電場から電位を求める　電位から電場は式 (12.13) から求められる．一方，電場から電位を求めるには，逆に積分してやればよい．

☞ 力から仕事を計算するのと同じやり方（式 (6.59) 参照）である．

$$\boxed{\varPhi = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}'} \tag{12.25}$$

無限遠で 0 で，原点 O のまわりで球対称の電場の場合，

$$\varPhi = -\int_\infty^r E(r')\, dr' \tag{12.26}$$

となる．

演習問題 12

A

1. **水素原子における重力とクーロン力**

水素原子のモデルとして，陽子のまわりを電子が回っていると考える．その回転半径は $0.5\mathring{A} = 5 \times 10^{-11}$ m である．このとき，クーロン力と重力の比を求めよ．(陽子の質量 $M_p = 1.7 \times 10^{-27}\, kg$, 電子の質量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\, kg$.)

2. **静電ポテンシャルと電場**

(12.13) に (12.12) を代入してクーロンの法則を導け．

3. **ポテンシャルと運動エネルギー**