13 ガウスの法則と導体

電荷 q の点電荷を考える．この周りの電場はクーロンの法則 (12.10) で簡単に計算できる．複数の点電荷がつくる電場も同様に計算できる．では，逆に**与えられた電場から電荷の大きさとその位置を推測することができるであろうか．答えはイエスである．**これが**ガウスの法則**と名付けられている．

13.1 ガウスの法則

電気量 Q の点電荷を中心とした半径 r の球を考えよう．この球面上の電場は $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ なので，球の表面積をかけると Q/ϵ_0 となる．これは半径に依存しない．

では球面でない場合はどうだろう？ これを説明する前に立体角という概念を説明する．

立体角　ある場所からものを眺めたとき，それがどれくらいの視野を占めるかを定量的にあらわしたものが立体角である（図 13.1）．この立体角に対応する平面の角がラジアンである．ラジアンは円弧の長さで定義された．立体角は

☞ ラジアンについては，4.4 節参照．

$$d\omega = \frac{\cos\theta dS}{r^2} \tag{13.1}$$

と定義される．dS は微小面積である．θ は面の法線ベクトルと視線の方向の角度を表す．$\cos\theta$ はどんなひねくれた方向を向いた面でも球面に射影することを意味する．どんなに大きな面積でも見る方向に沿っておかれてはあまり視野を妨げない．また，r^2 でわることは単位球に変換することを意味している．単位円の円周を積分すると 2π になるように，立体角を積分すると 4π になる．**閉じた曲面の中にある点のまわりの立体角の合計は必ず 4π である．**

☞ 月と太陽の面積の比は約 160000 倍，距離は約 400 倍なので，立体角がほとんど同じである．そのため見た目の大きさが変わらず，皆既日食が起こる．

ガウスの法則の導出　点電荷の周りの任意の曲面を考え，その面での電場を考える．面と電場は一般には垂直でない．ここでその垂直成分，E_n を考える（図 13.2）．$\boldsymbol{n}$ を曲面に垂直な単位ベクトルとすると，

☞ 閉じた曲面を考える場合，$\boldsymbol{n}$ の向きは，面の内側から外側に向かっているとする．

図 13.1　立体角の定義

$$E_n = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \tag{13.2}$$

が成り立つ．E_n を曲面すべてに関して積分した値，

$$\int E_n dS = \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} dS \tag{13.3}$$

は，$\cos\theta/r^2 dS$ が立体角 $d\omega$ なので

$$\int E_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int d\omega \tag{13.4}$$

になる．$\displaystyle\int d\omega = 4\pi$ なので，結局

$$\boxed{\int E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}} \tag{13.5}$$

が導かれる．

いま，点電荷 1 つを考えたが，ある閉曲面の中に N 個の電荷，$Q_1, \cdots, Q_N$ が存在しても（閉曲面の中である限り，場所はばらばらでよい），重ね合わせの原理から同じことがいえる．結局，

$$\boxed{\int E_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad , \quad Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i} \tag{13.6}$$

となる．積分は，閉曲面上に関して行う．和は閉曲面内のすべての電荷について行う．これがガウスの法則である．

点電荷の集まりでなく，連続的な電荷分布の場合はどうなるであろうか？この場合，電荷密度 ρ を使って

$$\int E_n dS = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \tag{13.7}$$

となる．

13.2　ガウスの法則の応用

ガウスの法則がいかに役に立つか，例をあげてみてみよう．

図 13.2　ガウスの法則

例 1：一様な直線電荷のつくる電場　線密度 λ で一様に帯電した電線を考える．空間の対称性から電場は放射状にできる．直線からの距離を r として，この直線を軸とする円柱を考えるとその側面に対する積分はガウスの法則から円柱内の電荷である．円柱の高さを h とすると，

$$2\pi r h E_r = \frac{h\lambda}{\epsilon_0} \tag{13.8}$$

なので

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{13.9}$$

となる．

図 13.3　直線上に一様に分布した電荷のつくる電場．仮想的に点線のような直線を軸とする半径 r，高さ h の円柱を考える．

例 2：電荷密度が一様な球のつくる電場　電荷密度 ρ で一様に帯電した半径 R の球を考える．中心から r 離れた電場を求めよう．この場合，$r > R$, $r < R$ で別々に考察する．

1. $r > R$ の場合，

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0} \tag{13.10}$$

より

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{13.11}$$

となる．

2. $r < R$ の場合，

$$4\pi\epsilon_0 r^2 E = \frac{4\pi r^3 \rho}{3} \tag{13.12}$$

より，

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \tag{13.13}$$

である．

☞ この関数依存性は地球の外部，内部の重力の大きさと同じ振る舞いである．重力も電磁気力も逆二乗の法則に従うので当然である．

この場合の電位 $\varPhi$ を求めておこう．式 (12.26) より，$\varPhi(r) = -\int_\infty^r E(r')\,dr'$ を計算する．$r > R$ の場合，

$$\varPhi(r) = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\,dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{13.14}$$

一方，$r < R$ の場合，

$$\varPhi = -\int_\infty^R E(r')\,dr' - \int_R^r E(r')\,dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right) \tag{13.15}$$

となる．

図 13.4　球内に一様に分布した電荷のつくる電場．球の内部と外部で振る舞いが異なることに注意．

アーンショー (Earnshaw) の定理　ガウスの法則を使うと**アーンショーの定理**を導くことができる．

アーンショーの定理: 電荷をどのように配置しても，電荷のない空間 (真空) に試験電荷が安定になる場所は存在しない．

試験電荷(test charge) とは，電場を調べるために置く非常に小さい (はじめにあった電場に影響を与えない) 電荷である．ある意味でこれは困った事情を表している．電荷を空中に閉じこめることは不可能ということである．

これは背理法で証明できる．もし安定なつり合いの位置が存在するとする．そこに試験電荷を置くと，試験電荷をその位置からどの方向にずらしても，もとのつり合いの位置に戻そうとする力が働く（安定の条件）．よってその周りで，電場がその安定点に向かっていなければならないか，安定点から外側に向かっていなければいけない．そのつり合いの点を含む閉曲面を考え，電場を面積分すると，この値は 0 には決してならない．この状況だと，電場の法線成分は常に同じ符号となるからである．よってガウスの法則からこの領域に電荷が含まれていることになる．これは真空ということに矛盾する．言い換えると，電荷がない領域ではポテンシャルは極大にも極小にもならない．

図 13.5　アーンショウの定理の証明．もし安定的なつり合いの位置が存在すると，電場はその方向に向かっている必要がある．その電場は中に電荷が存在していることを意味してしまうので，真空という条件と矛盾する．

たとえば，$(a, 0, 0), (-a, 0, 0), (0, a, 0), (0, -a, 0)$ に正電荷をおくと一見，原点から x, y 方向に電荷を動かすと復元力を受けるような気がする．だが，z 方向には復元力は働かず，ずるずると原点から遠ざかってしまう．

13.3　導体

導体と電場　　**導体**（金属，半導体）とは電気を通す物質で，一般に自由に動き回る電荷が存在するものである．導体に電荷を与えるとどのように分布するであろうか？**導体内では，電場は存在しない．**電場が瞬間的に存在しても，すぐに自由電荷がそれを打ち消すように再配置してしまうからである．

☞ 自由に動き回る電荷とは多くの場合，電子である．

導体内部で電場は存在しないので，導体内でどのような閉曲面を考えても，その面の式 (13.7) の左辺は 0 である．よって，導体内部では電荷は存在しない．こうして**導体内で電荷が分布するのは表面のみ**だとわかる．

導体の表面に沿って電場が存在しても，自由電荷がそれを打ち消すように再配置する．よって導体表面に沿った電場は存在しない．**導体表面では電場は導体に垂直の向き**ということである．このことから**導体全体が等電位になっている**ことがわかる．

まとめると以下のようになる．

1. 導体内部に電場は存在しない．
2. 導体表面での電場の向きは，必ず面に垂直である．
3. 導体全体は等電位になっている．

導体表面の電荷密度と電場　導体表面に面密度 σ で電荷が分布しているとする．上に述べたように電場は表面と垂直である．この表面と平行な面積 S の上底，下底をもつ円筒を考える（図 13.6）．

この円筒に対して，ガウスの法則を適用すると

$$
\begin{aligned}
\int dS\, E_n &= (\text{上底の寄与}) + (\text{下底の寄与}) + (\text{側面の寄与}) \\
&= E \times S + 0 + 0 \\
&= \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \\
\therefore E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad (13.16)
\end{aligned}
$$

となる．下底は導体内なので電場は 0，側面での電場は 0（導体内）か側面に平行（導体外）なので，積分に寄与しないことに注意しよう．

図 13.6　金属表面の電場の求め方．仮想的に金属表面に面積 S の上底，下底をもつ円筒を考え，ガウスの法則を適用する．

空洞をもつ導体　**空洞をもつ導体中では，外の電荷がどんな値や配置をとっていようと空洞内の電場は 0 である．**

☞ 空洞に電場があるとすると，これは空洞を作っている面のどこかから始まり，表面のどこかで終わることになる．これは空洞を囲む表面が等電位であることと矛盾する．

空洞内部に電荷があった場合はどうなるか？この場合，空洞内部の電場は

1. 導体の外側の電荷とこれによって導体表面上に誘起された電荷とがつくる電場
2. 空洞中の電荷とこれによって導体表面上に誘起された電荷とがつくる電場

の重ね合わせである．前者は空洞中で常に 0 であるので，外にどんな電荷があろうと，空洞内の電場は影響を受けない．これを**静電遮蔽**とよぶ．

導体と映像電荷　静電気学の多くの場合，導体の表面のポテンシャルと導体外の電荷分布を与えて，電場を求める．たとえば，導体を**接地**した場合，地球と導体は同じポテンシャルをもつ．地球のポテンシャルを通常 0 とするので，導体のポテンシャルも 0 となる．

導体内での電場は 0 なので，導体全体が導体表面のポテンシャルと同じポテンシャルをもつ．

接地した導体の近くに電荷を置いた場合，クーロンの法則を使うのでは電場を求めづらい．なぜかというと，クーロンの法則は電荷が与えられている場合に電場を決定する法則であり，導体表面にどのように電荷が分布しているかわからないと，役に立たないからである．そのような場合に有効なのが，**映像電荷**（または**鏡像電荷**）である．例をみてみよう．

映像電荷の例　点電荷 Q が接地した（ポテンシャルが 0 の）無限に大きな導体平面から d だけ離れているとする．この平面上でポテンシャルを 0 にするには，無限に大きな導体平面の代わりに点電荷 Q に対してちょうど鏡の像の位置に $-Q$ 電荷の電荷をおいてやればよい．この仮想的な電荷が映像電荷である．

図 13.7　金属板に対する映像電荷

電荷 Q が導体平面から受ける力は，距離 $2d$ 離れた $\pm Q$ の電荷が引き合う力となるので，

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$$

である．方向は導体表面に向かって垂直方向となる．

このとき，ポテンシャルは 2 つの点電荷からの寄与の和となるので，

$$r_\pm = \sqrt{(z \mp d)^2 + r^2}\,,\ \Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \tag{13.17}$$

で与えられる（$r = \sqrt{x^2+y^2}$）．導体表面上の電場は

$$\boldsymbol{E} = (0, 0, -\frac{Qd}{2\pi\epsilon_0 R^3})\,,\ R = \sqrt{r^2+d^2} \tag{13.18}$$

となる．

表面電荷は式 (13.16) より，

$$\sigma = \epsilon_0 E_z = -\frac{Qd}{2\pi R^3} \tag{13.19}$$

となる．

例題 13.1　金属表面の電荷

境界面上で σ を積分し，これが $-Q$，すなわち映像電荷に等しいことを示せ．

解　(13.18) で表される境界上の電荷面密度を面積分する．

$$\begin{aligned} Q_{\text{境界}} &= \int dS\sigma \\ &= \int_0^\infty \sigma 2\pi r dr \\ &= \int_0^\infty dr 2\pi r \frac{-Qd}{2\pi\sqrt{r^2+d^2}^3} \\ &= -Qd\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}}\right]_0^\infty = -Q \end{aligned} \tag{13.20}$$

よって，ちょうど映像電荷分が実際に表面に誘起されている．

次に，原点に半径 a の導体球がおいてあり，電荷 q の点電荷が r_q に置いてあるとする（図 13.8）．

はじめ，球が接地されているとする．このとき球の表面で電位は 0 になる．試しに中心と点電荷を結んだ直線上 (z 軸にとる), $(0, 0, r_I)$ に電荷，q_I を置く．このとき，球の表面でポテンシャルが 0 になる条件は

☞ この軸上に置くのは対称性からである．

$$0 = 4\pi\epsilon_0\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{\sqrt{a^2 + r_q^2 - 2ar_q\cos\theta}} + \frac{q_I}{\sqrt{a^2 + r_I^2 - 2ar_I\cos\theta}} \tag{13.21}$$

である．これより

$$\frac{q_I}{r_I} = -\frac{q}{a}\,,\ \frac{r_q}{a} = \frac{a}{r_I} \tag{13.22}$$

ととればよい．よって映像電荷の大きさは

$$q_I = -\left(\frac{a}{r_q}\right)q \tag{13.23}$$

で位置は

$$r_I = \frac{a^2}{r_q} \tag{13.24}$$

である．

接地されていない場合，球のポテンシャルは 0 とは限らない．このときは球の中心にもう 1 つの映像電荷を置いてやって，ポテンシャルを調節すればよい．

☞ この場合も球面上に実際に映像電荷分が誘起されている．これは球面を覆う面を考えて，ガウスの法則を考えればすぐにわかる．映像電荷で考えても実際の電荷でも球の外側にある電場は同じなので，球の中にある電気量も等しいのである．

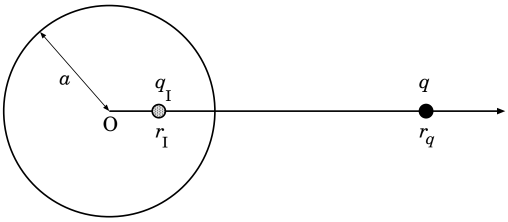

図 13.8　金属球に対する映像電荷

例題 13.2　球がつくる映像電荷

電荷 Q の電荷をもった接地されていない球と，外部電荷 q を考える．このとき球の表面上のポテンシャルが

$$\Phi = \frac{Q - q_I}{4\pi\epsilon_0 a}$$

となることを示せ．

解　r_I に q_I をおけば，球面上の電位が 0 になる．このとき，球面には q_I の電荷が実際には誘起されている．球面が等電位面であるという状況を保ちながら，球面の電荷を Q にするには，球面に $Q - q_I$ を加えればよい．これは原点に $Q - q_I$ の映像電荷が生じたと考えればよい．

原点の映像電荷がなければ球面の電位は 0 だった．よって原点の映像電荷がつくるポテンシャルが球面のポテンシャルである．球の半径は a なので，題意が示される．

13.4　電気容量

キャパシタとは，電気をためておく装置である．簡単なモデルとして，平行に置いた 2 枚の導体平板を考えよう．これに電位差 V をかけると，電荷 Q がたまる (正確には，片方の導体平板に $+Q$ が，もう片方に $-Q$ がたまる)．高校時代に物理を履修した人は，Q と V は比例することを学んだであろう．

この節では，このコンデンサの概念を拡張し，複数の導体が存在する状況で，その表面にたまっている電荷と電位の関係を考察する．

蓄えられた電気量と電位の関係を表すものが**電気容量**である．導体からなる系は，電気をためることができるので，**コンデンサ**，または**キャパシ**

導体全体で電位は等しいので，1 つの導体に対して 1 つの電位が決まる．

タとよばれる．コンデンサの単位は [F]（ファラッド）である．

1 個の孤立した導体の場合は

$$Q = CV \tag{13.25}$$

で電気容量 C が定義される．たとえば半径 R の導体球の電位は $V = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ なので

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \tag{13.26}$$

である．形状が球からずれていてもだいたいこれくらいの大きさになっているのを知っておくとよい．

図 13.9　球の電気容量

導体が 2 個ある場合は，平行平板コンデンサに代表される．2 つの導体の大きさは R 程度で，その距離は d とする．このとき，一方の導体（仮に A とよぶ）を接地し電圧を 0 とし，もう一方の導体（仮に B とよぶ）に電圧 V をかける．そのとき導体 B に蓄えられる電気量 Q_B は

$$Q_B = CV \tag{13.27}$$

とかける．逆に，一方の導体 B を接地し電圧を 0 とし，導体 A に電圧 V をかけるとき，導体 A に蓄えられる電気量 Q_A は

$$Q_A = C'V \tag{13.28}$$

と表記されることで，C' は定義されるが，実は $C = C'$ なので，これらを区別せず，2 個の導体の電気容量を C とよぶ．

例題 13.3　平行平板コンデンサの電気容量

ガウスの法則を用いて，平行平板コンデンサの電気容量が，

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \tag{13.29}$$

であることを示せ．（S は平板の面積，d は平板の距離である．）

また，$S = 1\text{cm}^2$，$d = 1\text{mm}$ のときの C を求めよ．

解　ガウスの法則から，金属表面の電荷密度 σ と電場の関係は式 (13.16) で与えられる．

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{13.30}$$

上の極板と下の極板，両方から電場は生じるので，その 2 倍が極板間にかかっている電場である．

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{13.31}$$

$\sigma = Q/S$，$V = Ed$ より，

$$\frac{V}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \qquad \therefore Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} V \tag{13.32}$$

$S = 1\ \mathrm{cm}^2$，$d = 1\mathrm{mm}$ を代入すると，$C \fallingdotseq 0.9 \times 10^{-12}$ F =0.9 pF（ピコファラッド）となる．

13.5　静電エネルギー

仕事と静電エネルギー　原点に点電荷 Q_1 があり，無限遠から点電荷 Q_2 を近づけ，2 つの距離が R となったとしよう．移動に必要な仕事 W は

$$W = -\int_\infty^R d\,rF(r) = -\int_\infty^R dr\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{13.33}$$

となる．$F(r)$ は電荷 Q_2 に働く力である．この仕事はエネルギーとして蓄えられる．これを**静電エネルギー**U とよぶ．静電エネルギーは

$$U = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{13.34}$$

である．

クーロン相互作用している粒子系の静電エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1, i\neq j}^{N}\frac{Q_iQ_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} \tag{13.35}$$

で得られる．

1/2 という因子は，2 重カウントを補正するためである．たとえば，$i = 1, j = 2$ と $i = 2, j = 1$ の項はそれぞれ $Q_1Q_2/4\pi\epsilon_0 R_{12}$，$Q_2Q_1/4\pi\epsilon_0 R_{21}$ で，同じものを 2 回数えている．

Φ_i を i 番目の粒子の位置でのポテンシャル，Q_i をその電荷として，(12.12) 式と組み合わせると，

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N} Q_i\Phi_i \tag{13.36}$$

で与えられる．

逆に Q_1, Q_2 が R だけ離れていたとする．電荷の符号は同符号だとすると，2 つは斥力をおよぼし合う．一方（たとえば Q_1）を固定し，もう一方 (Q_2) を動けるようにすると，この斥力により Q_2 は加速する．無限まで行ったとき，Q_2 の運動エネルギー K は，エネルギーの保存則より

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{13.37}$$

となる．

静電場のエネルギー　静電エネルギーを電場から求めてみよう．平行平板コンデンサの静電エネルギーは，電荷を Q から $Q+\Delta Q$ に増やすために $\Delta Q \times V$ の仕事を電池がすることから求められる．

$$U = \int_0^Q dQ\, V = \int_0^Q dQ\, \frac{Q}{C} = \frac{Q^2}{2C} \tag{13.38}$$

☞ 式 (13.29)

ここでコンデンサ間の電場 $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} = \dfrac{Q}{\epsilon_0 S}$，$C = \dfrac{\epsilon_0 S}{d}$ を使って，C, Q を消去すると

$$U = S \times d \times \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \tag{13.39}$$

となる．これは単位体積あたり

$$\boxed{u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}} \tag{13.40}$$

のエネルギーが存在していることを意味している．このように静電エネルギーを静電場のもっているエネルギーと解釈することが可能である．

演習問題 13

A

1. **1 次元イオン結晶の静電エネルギー**

N 個の $+e$ の電荷と N 個の $-e$ の電荷が，a だけ離れて交互に直線上に配置されている．N が十分大きいとき，中心の電荷の静電エネルギーは

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \times 2\ln 2$$

となることを示せ．

2. **地球の静電容量**

地球を金属球と見なすと，その静電容量はいくらか．

3. **微小なコンデンサー**

大きさが 1 μm，間隔が 0.1μ m の平行平板コンデンサに素電荷 e をためると，何 J のエネルギーになるか?

4. **帯電した球の静電エネルギー**

接地されていない半径 R の球殻を考える．これに電荷 Q を与える．球殻の内部の電場は 0 である．

(a)　このとき，球殻のまわりの電場を求めよ．

(b)　球殻のもつ静電エネルギーを，電荷を無限から移動する仕事を計算することで求めよ．

(c)　球殻のもつ静電エネルギーを，球殻のまわりの電場を計算することで求めよ．